



Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik

WANDERnde WELLEN IN
MAKROSKOPISCHEN
BEWEGUNGSMODELLEN

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

BACHELOR OF SCIENCE

eingereicht von: Leoni Hoffboll
l.hoff10@uni-muenster.de

Betreuer: Prof. Dr. Martin Burger

Abgabedatum: 27.07.2015

Zusammenfassung

Wandernde Wellen geben die Möglichkeit eine Lösung von nicht-linearen Erhaltungsgleichungen zu finden, bei denen die klassische Lösung zusammenbricht. Dazu wird ein makroskopisches Bewegungsmodell entwickelt, anhand dessen man diese Traveling Waves berechnen kann.

Anschaulich wird dieses Phänomen zum einen am Verkehrsfluss und zum anderen am kollektiven Verhalten von Kaiserpinguinen erklärt. Die Bewegungen in einer wandernden Pinguingruppe sind vergleichbar mit dem Stop-and-Go Bewegung im Straßenverkehr. Zur Entstehung der wandernden Wellen kommt es vor allem durch ein hohes Aufkommen von Gruppenmitgliedern bei geringem Abstand untereinander, also bei hoher Dichte.

In dieser Arbeit werden die Erkenntnisse aus der Verkehrsmodellierung auf das Verhalten von Kaiserpinguinen übertragen und die wellenförmigen Bewegungen im jeweiligen makroskopischen Modell erforscht.

Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, *Leoni Hoffboll*, dass die vorliegende Arbeit über „Wandernde Wellen in makroskopischen Bewegungsmodellen“ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Ort, Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Modelltypen	3
2.1	Das mikroskopische Verkehrsflussmodell	3
2.2	Das makroskopische Verkehrsflussmodell	4
3	Das Kontinuumsmodell und Traveling Waves im Verkehrsfluss	6
3.1	Herleitung des Kontinuumsmodells	6
3.2	Traveling Waves	10
3.2.1	Definition Traveling Wave	11
3.2.2	Schockwellen	11
3.2.3	Lösungsansatz mit Traveling Waves	12
4	Das Kontinuumsmodell und Traveling Waves in einer Pinguinkolonie	21
4.1	Vergleich Verkehr/Pinguine	21
4.2	Das mikroskopische 1D Modell	22
4.3	Das makroskopische 1D Modell	26
4.4	Traveling Waves in einer Pinguinkolonie	31
5	Fazit	42
	Abbildungsverzeichnis	43
	Literaturverzeichnis	44

1 Einleitung

Die Natur bringt immer neue Wunder hervor, die für den Menschen nicht nur interessant, sondern deren Erforschung häufig sogar zu technischen, medizinischen und generell naturwissenschaftlichen Fortschritten führt.

Ein Phänomen, das die Aufmerksamkeit in Bezug auf das Stauverhalten im Straßenverkehr geweckt hat, findet sich in der Tierwelt wieder. Es handelt sich dabei um den Kaiserpinguin, der eines der wenigen Lebewesen ist, das im Winter der Antarktis brütet. Um sich möglichst gut vor der Kälte zu schützen, bilden Pinguine Kolonien, in denen sie gemeinsam mit sehr wenig Körperabstand voneinander wandern und in dieser Gruppe ruhen. Diese Gruppenbewegungen der Pinguine sind vergleichbar mit der Stop-and-Go Bewegung im Verkehr [8].

Denn Stau auf der Autobahn aufgrund eines Verkehrsunfalls, einer Spurreduzierung oder durch Überholmanöver von Lastkraftwagen; wer kennt das nicht? In der mathematischen Modellierung gibt es verschiedene Möglichkeiten, solche oder ähnliche Fälle mathematisch wiederzugeben und zu simulieren. Diese Methoden helfen, Stauentwicklungen zu verstehen und aus verschiedenen Sichtweisen zu betrachten. Davon werden Informationen erwartet, wie Stau vermieden und reduziert werden kann, zum Beispiel um die Umwelt zu entlasten und Unfälle zu verhindern. Generell unterscheidet man dabei zwischen zwei Sichtweisen. Zum einen die Modellierung jeden einzelnen Autos als Teilchen auf einem bestimmten Gebiet, und zum anderen die Modellierung von Dichten, also des Verkehrsflusses als Ganzes. Die letztere Betrachtung soll im Vordergrund dieser Arbeit stehen und fällt in den Bereich der makroskopischen Modellierung.

Diese begann mit einem Modell von Lighthill, Whitham and Richards, bei dem sie die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$ (vgl. (3)) für eine Dichte ρ und eine Ausgleichsgeschwindigkeit v verwendeten. Payne und Whitham entwickelten das Modell weiter zu einem Modell zweiter Ordnung, indem sie eine zweite Gleichung für die Geschwindigkeit, eine Bewegungsgleichung, hinzufügten, analog zur Fluidodynamik. Dies ist bedeutend für den Sachzusammenhang, da im Verkehr nicht nur Dichte und Geschwindigkeit eine Rolle spielen, sondern auch die Beschleunigung. Trotzdem sahen Wissenschaftler die Möglichkeit, das Modell noch besser der Wirklichkeit anzunähern. Daraufhin entwickelten Aw und Rascle das in dieser Arbeit dargestellte Verkehrsmodell zweiter Ordnung, wobei sie der Bewegungsgleichung einen weiteren Relaxationsterm hinzufügten, der nun das zeitverzögerte Handeln und die Reaktionen auf das Handeln des Vordermanns mit einbezog. [9]

In der Verkehrsmodellierung erhofft man sich durch mathematische Effizienz den Verkehrsstau besser in den Griff zu bekommen, wohingegen man durch das Erforschen des kollektiven Verhaltens von Pinguinen lediglich versucht, die Bewegungen in einer Pinguinkolonie zu verstehen.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Erkenntnisse aus der Verkehrsmodellierung aufzuarbeiten, um danach Rückschlüsse auf die Interaktion der Kaiserpinguine zu ziehen. Zunächst werden in Kapitel 2 die wichtigsten Modelltypen vorgestellt, die zunächst am Beispiel des

Verkehrsstaus veranschaulicht werden. Dieses Kapitel dient der Aufbereitung des Grundwissens, das für die weiteren Themen von Bedeutung ist. Da globale Bewegungsmodelle im Vordergrund stehen sollen, wird in Kapitel 3 ein passendes Verkehrsflussmodell hergeleitet und anhand dessen die Existenz von wandernden Wellen im Straßenverkehr gezeigt. In Kapitel 4 werden zum einen Modelle in Bezug auf eine Kolonie von Kaiserpinguinen entwickelt, indem die gesammelten Ideen aus dem Verkehrsfluss von Autos übertragen werden. Zum anderen werden die wandernden Wellen, die in diesem Modell vorkommen, konkret berechnet, wobei jeweils der mathematische Kontext in die Realität eingeordnet wird.

2 Die Modelltypen

In der Modellierung von Verhalten und Dynamik in Gruppen ändert sich im Laufe einer betrachteten Zeit die Konstellation der Gruppe durch Bewegung. Diese Zustandsänderungen können unterschiedlich modelliert werden. Hier betrachtet man mikroskopische und makroskopische Zustandsgrößen.

Bei der mikroskopischen Zustandsgröße handelt es sich um eine diskrete Modellierung. Jedes einzelne Mitglied der Gruppe ist von Bedeutung. In diesem Fall bedeutet das, dass beispielsweise die Position jedes einzelnen Pinguins, beziehungsweise jedes einzelnen Kraftfahrzeugs modelliert wird. Es handelt sich folglich um eine sehr genaue und lokale Gestaltung des Bewegungsablaufs.

Makroskopische Zustandsgrößen verwendet man bei einer kontinuierlichen Modellierung, das heißt, die Gesamtheit der Gruppe wird in Augenschein genommen. Hier bedeutet das nichts anderes, als dass das Gesamtverhalten der Kolonie untersucht wird, also beispielsweise die Pinguindichte, beziehungsweise die Verkehrsdichte. Somit wird die Betrachtung von globalen Bewegungen möglich. [1]

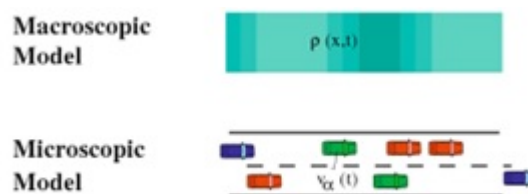


Abbildung 1: Die Modelle im graphischen Überblick

2.1 Das mikroskopische Verkehrsflussmodell

Für eine bessere Einführung in das mikroskopische Modell, sei hier zunächst ein Einblick in die Kenngrößen gegeben:

- i $\hat{=}$ i -tes Fahrzeug (Fahrzeug $i+1$ fährt hinter Fahrzeug i)
- t $\hat{=}$ Zeit
- $x_i(t)$ $\hat{=}$ Ort/Position(Mittelpunkt)
- N $\hat{=}$ Gesamtanzahl der Autos
- $v_i(t)$ $\hat{=}$ Geschwindigkeit
- $v_i^0(t)$ $\hat{=}$ Wunschgeschwindigkeit
- d_i $\hat{=}$ geschwindigkeitsabhängiger Sicherheitsabstand
- τ_i $\hat{=}$ Relaxation(zeitlich verzögerte Reaktion auf seinen Vordermann, vgl. Abb. 3)
- c, e $\hat{=}$ dimensionslose Konstanten

Wenn man nun das mikroskopische Modell aufstellen möchte, gibt es eine wichtige Grundbeobachtung, die das Modell möglichst realitätsnah gestaltet: Ein Autofahrer möchte $v_i^0(t)$, seine eigene Wunschgeschwindigkeit, erreichen. Diese Geschwindigkeit muss zum einen an äußere Faktoren (z.B. Tempolimit der Straße, PS des Fahrzeugs) angepasst werden und zum anderen an die Geschwindigkeit des Vordermanns. Zudem ist der Mensch

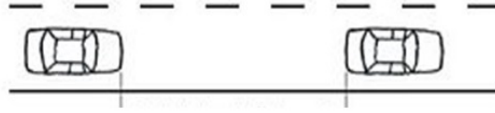


Abbildung 2: Abstand zwischen 2 Autos(hier (Mittel-)Punkte)

grundsätzlich darauf bedacht, möglichst sicher an sein Ziel zu gelangen und möchte deshalb d_i zum Vordermann einhalten (vgl. Abb. 2).

Die wichtigsten Faktoren, die im Verkehr eine Rolle spielen, sind Geschwindigkeit und Beschleunigung. Als Ansatz für die Beschleunigung verwendet man die *Newton'sche Bewegungsgleichung*, indem man das Auto als festen Körper betrachtet und die äußeren Faktoren F_i durch die Bedienung des Gaspedals einfließen lässt. Somit kommt es zu einer Änderung der Beschleunigung.

Man erhält das mikroskopische Verkehrsflussmodell für $\forall i = 1, \dots, n$. [2]

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(t) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_i(t)}{dt} &= F_i(v_i(t) - v_i^0(t), x_{i+1}(t) - x_i(t) - d_{i+1}(v_i(t))) \\ &= -\left(\frac{v_i(t) - v_i^0(t)}{\tau_i} + \frac{c}{(x_{i+1}(t) - x_i(t) - d_{i+1}(v_i(t)))^e}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

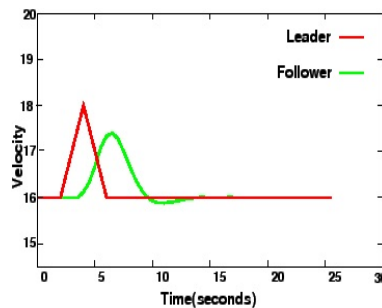


Abbildung 3: Veranschaulichung der Relaxation als Abstand zwischen den Graphen

2.2 Das makroskopische Verkehrsflussmodell

In diesem Modell geht es um die Gesamtheit der Gruppe, wodurch die Dichte ρ als geeignete Unbekannte verwendet wird und die Parameter τ , v_0 und d als konstant angenommen werden können, da nicht mehr Reaktion, Wunschgeschwindigkeit und Sicherheitsabstand individuell interessant sind, sondern allgemeine Richtwerte. Man erhält das System:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(\frac{v - v_0}{\tau} + \frac{c}{\left(\frac{1}{\rho} - d\right)^e}\right) - v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

Die Gleichung (3) ist auch bekannt unter dem Namen Kontinuitätsgleichung, sodass man dieses Modell auch das Kontinuumsmodell nennt.[2]

3 Das Kontinuumsmodell und Traveling Waves im Verkehrsfluss

3.1 Herleitung des Kontinuumsmodells

Im mikroskopischen Modell (vgl. Kapitel 2) wurde bereits eine Idee entwickelt, wie die Gleichungen (1), (2) zustande kommen. Diese Frage stellt sich nun auch für das makroskopische Modell. Der Abschnitt 3.1 zur Bearbeitung dieses Zusammenhangs bezieht sich auf [2].

Da die mikroskopische Zustandsgröße in der diskreten Modellierung verwendet wird, gibt es dort eine endliche Anzahl von Teilchen (Fahrzeugen). Für das Kontinuumsmodell betrachtet man eine Gesamtheit, sodass der Übergang vom mikroskopischen zum makroskopischen naheliegender mit dem Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ erreicht wird. Dazu müssen die Gleichungen (1), (2) neu skaliert werden mit $\tilde{x}_i := \frac{x_i}{N}$.

Man erhält aus (1) die Gleichung (5), indem man die Ableitung als Differenzenquotienten betrachtet. Denn nach den Grenzwertsätzen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{N} \right) = \frac{1}{N} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

für eine Folge a_n . Analog macht man dies für die Gleichung (2) und wählt schon hier ohne Einschränkung τ , v_0 und d als konstant, was durch die Betrachtung der Gesamtheit möglich wird:

$$\frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} = \frac{v_i(t)}{N} =: \tilde{v}_i(t) \quad (5)$$

$$\frac{d\tilde{v}_i(t)}{dt} = - \left(\frac{\tilde{v}_i(t) - v_0}{\tau} + \frac{c}{(\tilde{x}_{i+1}(t) - \tilde{x}_i(t) - d)^e} \right) \quad (6)$$

Nun den Grenzwert zu berechnen, hätte ein System mit unendlich vielen Teilchen zur Folge. Um die Komplexität zu Reduzieren, muss die Dichte ρ als geeignete Unbekannte gewählt werden.

Dafür muss ein Zusammenhang zwischen Teilchen und Dichte erarbeitet werden. Die Dichte ist definiert mit einer Masse m und einem Straßenabschnitt Δx :

$$\rho(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta x}$$

Daher ist folgende Überlegung naheliegender:

$$\int_{\Delta x} \rho(x, t) dx = \frac{\text{Anzahl Teilchen auf } \Delta x \text{ zur Zeit } t}{N} (= m)$$

Es ergibt sich das Problem, dass die Teilchen hier (Mittel)Punkte sind und somit weder Masse noch Dichte besitzen.

Infolgedessen wählt man einen stochastischen Ansatz und betrachtet die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(a) da$$

für eine Dichte f und die empirische Verteilungsfunktion

$$\sum_{n=1}^N F_N = \sum_{n=1}^N \frac{i}{N} \mathbb{1}_{x \in (\tilde{x}_{i+1}, \tilde{x}_{i+1})} \quad .$$

Eine Lösung findet man, indem aus der inversen Funktion der Verteilungsfunktion die Dichte abgeleitet wird. Wie in der mathematischen Statistik behandelt, gilt nun:

$$\sum_{n=1}^N F_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{f.s.} F$$

und man erhält den direkten Zusammenhang zur Dichte, indem wir die Dichte als Folge betrachten:

$$\frac{\partial F_N(x, t)}{\partial x} = \rho_N(x, t)$$

Die fast sichere Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion gegen die Verteilungs-

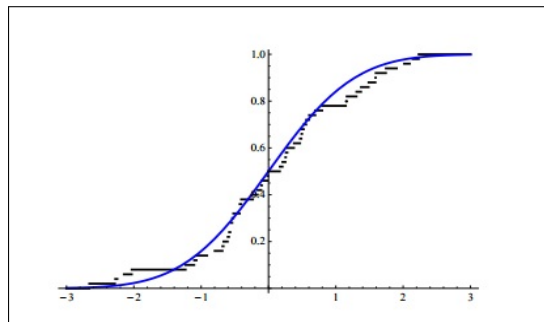


Abbildung 4: emp. Verteilungsfunktion (schwarz), Verteilungsfunktion (blau)

funktion sorgt später bei der Verwendung des Grenzwertes für die Existenz eines Grenzwertes der Folgen (vgl. Abb. 4).

Durch die Eigenschaften von F_N als Treppenfunktion mit

- i. F_N ist monoton wachsend
- ii. F_N hat Wertebereich $[0,1]$

kann man nun die Pseudoinverse bilden, die wie folgt definiert ist:

Definition 1. Die Pseudoinverse oder Inverse Verteilungsfunktion F^- von F mit $F^- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch $F^-(s, t) = \inf \{a \in \mathbb{R} | F(a) \geq s\}$ Es gilt außerdem: $\inf \{\emptyset\} = \infty$ und $\inf \{\mathbb{R}\} = -\infty$ [3]

Somit lässt sich die Pseudoinverse u_N von F_N definieren und analog v_N :

$$u_N(s, t) = \tilde{x}_i(t) \mathbb{1}_{\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)}(s)$$

$$v_N(s, t) = \tilde{v}_i(t) \mathbb{1}_{\left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right)}(s)$$

Dies setzt man nun in (5), (6) ein und erhält:

$$\frac{\partial u_N(s, t)}{\partial t} = v_N(s, t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_N(s, t)}{\partial t} = -\left(\frac{v_N(s, t) - v_0}{\tau} + \frac{c}{\left(\frac{u_N(s+\frac{1}{N}, t) - u_N(s, t)}{s+\frac{1}{N}-s} - d\right)^e}\right) \quad (8)$$

Es wurden somit geeignete Folgen gefunden. Wegen der fast sicheren Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion gegen die Verteilungsfunktion, existieren folgende Grenzwerte und sind eindeutig:

$$\frac{\partial F_N(x, t)}{\partial x} = \rho_N(x, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = \rho(x, t) \quad (9)$$

$$u_N(s, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u(s, t) \quad (10)$$

$$v_N(s, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} V(s, t) \quad (11)$$

Indem man diese Grenzwerte in (7) und (8) einsetzt, sowie den Differenzenquotienten durch die Ableitung von u nach s ersetzt, erhält man:

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial t} = V(s, t) \quad (12)$$

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} = -\left(\frac{V(s, t) - v_0}{\tau} + \frac{c}{\left(\frac{\partial u}{\partial s} - d\right)^e}\right) \quad (13)$$

Die Gleichungen beschreiben ein System, das in der Pseudoinversen definiert ist. Deshalb folgt die Rücktransformation unter Verwendung der Definition der Inversen durch $F(x, t) = s$ und $u(s, t) = x$:

i. $F(u(s, t), t) = s$

ii. $u(F(x, t), t) = x$

Da von der Inversen in die normale Form zurück transformiert werden soll, wird nur Gleichung ii. benötigt. Diese wird nach x und nach t differenziert mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \stackrel{!}{=} \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \stackrel{!}{=} \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

Setzt man nun in (14) Gleichung (9) ein und (16) in (15), so ergibt sich:

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial s} = \frac{1}{\rho(x, t)} \quad (16)$$

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

Weiter verwendet man (12) in (17)

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + V(s, t) = 0$$

was man weiter umformen kann zu:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \rho(x, t)V(s, t) = 0 \quad (18)$$

Außerdem definiert man $V(s, t) := v(x, t)$ und setzt dies in (18) ein:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \rho(x, t)v(x, t) = 0 \quad (19)$$

Durch Umformen erhält man:

$$\frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = -\rho(x, t)v(x, t) \quad (20)$$

Ferner differenziert man (19) ein weiteres mal nach x . Dabei verwendet man den Satz von Schwarz aus der Analysis II zum Vertauschen der Differentiationsvariablen für eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion F :

$$\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x \partial t} + \frac{\partial(\rho(x, t)v(x, t))}{\partial x} = 0$$

Indem man (9) einsetzt, ergibt sich die Kontinuitätsgleichung (3):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

Die Rücktransformation muss nun auch für die Bewegungsgleichung (13) hergeleitet werden. Dafür benutzt man die Definition $v(x, t) = V(s, t)$, (9) und differenziert v nach x und

t mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial V(s, t)}{\partial s} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial V(s, t)}{\partial s} \rho(x, t) \quad (21)$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial V(s, t)}{\partial s} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(s, t)}{\partial t} \quad (22)$$

Man formt nach V um und setzt (20) und (21) in (22) ein:

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \frac{1}{\rho(x, t)} \quad (23)$$

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(s, t)}{\partial s} v(x, t) \rho(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} v(x, t) \quad (24)$$

Zuletzt fügt man (24), (16) und $V(s, t) = v(x, t)$ in (13) ein. Durch die Umformung des Terms aus (24) kommt man auf die gewünschte Gleichung (4):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\left(\frac{v - v_0}{\tau} + \frac{c}{\left(\frac{1}{\rho} - d\right)^e}\right) - v \frac{\partial v}{\partial x}$$

Durch eine geeignete Wahl der Randdaten und Anpassung der Konstanten, kann man mit dem Modell (3), (4) nun verschiedene Sachverhalte darstellen. Für den hier motivierten Fall ist die Simulation eines Staus besonders interessant. [2]

3.2 Traveling Waves

Die Situation des Verkehrsstaus führt zum Phänomen der Traveling Wave. Eine Traveling Wave ist eine Funktion $\tilde{u}(s, t)$, die in vielen biologischen und chemischen Bereichen Verwendung findet. $\tilde{u}(s, t)$ beschreibt dann zum Beispiel die Dichte von Populationen oder Konzentrationen, sodass die 'Traveling Wave Lösung' die Ausbreitung von Krankheiten oder hier das Wanderverhalten von Pinguinen, bzw. die Stauausbreitung im Verkehr beschreibt. Das heißt, dass das System (3), (4) aus Differentialgleichungen eine laufende Welle als Lösung hat. In dieser Arbeit werden die Begriffe wandernde und laufende Welle und Traveling Wave <http://www.vwi.tu-dresden.de/treiber/movie3d/synonym> verwendet. [4] Konkret auf den hier betrachteten Fall bezogen, kann man sich die Situation als einen entstehenden Stau vorstellen. An einer bestimmten Stelle auf der Autobahn geschieht ein Unfall. Alle Autos danach müssen bis zum Stillstand abbremsen. Nachdem die verunfallten Autos entfernt wurden, sollte es keinen Grund mehr geben, warum ein Stau weiter existiert. Das ist aber der Fall. Wenn man hinter einem abgebremsten Auto ist, muss man selbst bremsen, um nicht in den Vordermann hineinzufahren. So geht es auch allen dahinter kommenden Fahrzeugen. Um den Stau sofort aufzulösen, müssten alle Autos gleichzeitig mit gleicher Geschwindigkeit losfahren, was nicht realistisch ist. Jeder Fahrer reagiert mit einer Verzögerung τ auf seinen Vordermann. Und möchte zusätzlich aus Sicherheitsgründen einen gewissen Abstand d einhalten. Dadurch entsteht eine Welle, die sich vom Stauanfang bis zum Stauende durchzieht.

Außerdem bewegt sich der komplette Stau nach hinten, denn in der Zeit, in der die vordersten Autos komplett standen, haben sich immer mehr Autos ans Ende des Staus gesetzt. Der Stau verschiebt sich nach hinten (vgl. Abb. 5). Während am Anfang die ersten Autos wieder losfahren, beginnt sich die Fortbewegungswelle durch den Stau hindurchzuziehen. Durch die verzögerte Reaktion bildet sich am Ende eine immer längere Schlange. Diese laufende Welle ist eine Schockwelle, die sich durch die Fahrzeugmasse ausbreitet. [5] Um sich die wellenförmige Bewegung im Stau besser vorstellen zu können, vergleiche [11].

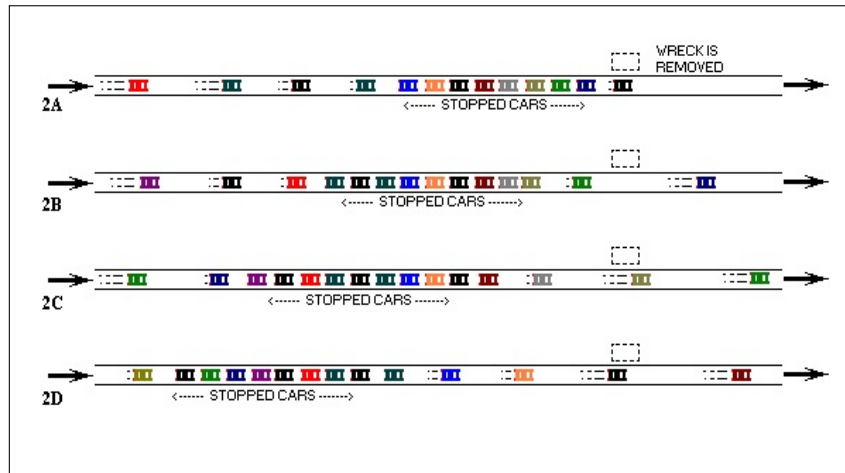


Abbildung 5: Der Stau verschiebt sich nach hinten

3.2.1 Definition Traveling Wave

Eine Traveling Wave ist eine Lösung für eine Differentialgleichung der Form:

$$\tilde{u}(s, t) = U(ns + bt)$$

mit $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$U \hat{=}$ Profil (d.h Faktoren, die die Welle beeinflussen, z.B. Wetter, Straßenbelag,...)

$s \hat{=}$ Ort

$t \hat{=}$ Zeit

$n \in \mathbb{R} \hat{=}$ Ausbreitungsrichtung

[4]

3.2.2 Schockwellen

Die Idee, warum man diese Form von Lösung überhaupt braucht, liegt darin, dass bei vielen nicht-linearen Erhaltungsgleichungen die klassische Lösung zusammenbricht. Das tritt zum Beispiel dann auf, wenn sich Kurven (Charakteristiken) schneiden (z.B. in $s = \bar{s}$) und

eben dies tritt ein, wenn man einen Verkehrsstau simuliert. Abbildung 6 zeigt, wie eine Unstetigkeit in einer Dichtewelle entsteht.

Traveling Waves geben hier die Möglichkeit eine Lösung zu finden, indem mit Sprungstellen und Schocks gearbeitet wird. Das geht wie folgt:

Zunächst muss eine Unstetigkeitsstelle $s = \bar{s}$ existieren, wobei es für $s > \bar{s}$ und $s < \bar{s}$ eine klassische Lösung für \tilde{u} gibt. Bei $s = \bar{s}$ besitzt \tilde{u} eine Sprungstelle

$$[\tilde{u}] = u_+ - u_-$$

wobei es sich dabei um die Randbedingungen

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \tilde{u}(s, t) = u_+$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \tilde{u}(s, t) = u_-$$

handelt mit u_+, u_- konstant. Die Stoßgeschwindigkeit der Welle ist $b = \frac{\partial s}{\partial t}$.

Definition 2. Eine Unstetigkeit heißt genau dann Schock, wenn folgende notwendige Bedingungen erfüllt sind:

i. Rankine-Hugoniot-Bedingung: $b = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$, f ist eine Funktion, die den Fluss beschreibt

ii. Entropie-Bedingung: $u_- > u_+$

[6]

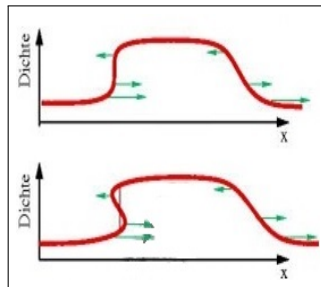


Abbildung 6: Es handelt sich um eine Welle mit gleicher Amplitude, die sich unterschiedlich schnell je nach lokaler Dichte bewegt. Je höher die Dichte ist, desto langsamer (oder sogar rückwärts) bewegt sie sich. Die Welle 'überschlägt' sich, es entsteht eine Unstetigkeit(unten)

3.2.3 Lösungsansatz mit Traveling Waves

Mithilfe dieser Grundlage soll die Frage nach der Existenz der Traveling Wave Lösung für das System (3), (4), das Kontinuumsmodell, geklärt werden.

Allgemeine Modelle, die mit Traveling Wave Lösungen arbeiten, sind folgender Form

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0 \quad (25)$$

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} = \tau P'(s) \frac{\partial u}{\partial m} + f(s) - u \quad (26)$$

[7] Wichtig dabei ist, dass die Funktionsbezeichnungen hier nicht mit den Funktionsbezeichnungen aus (3), (4) bzw. wegen der inversen Definition aus (12), (13) verwechselt werden.

$$s = \frac{1}{\rho} \quad u = V \quad t = t$$

$$\text{Es gilt (*): } m = s \quad \tau = \tau \quad P'(s) = 0$$

$$f(s) = v_0 - \frac{c\tau}{(s-d)^e}$$

Mit dieser Definition erhält man aus (25), (26) das System (12), (13), bzw. (3), (4).

Um eine bessere Einführung in die Lösungs idee der Traveling Waves zu bekommen, wird nun zunächst der vereinfachte Fall $\tau = 0$ behandelt. Im Allgemeinen wird der Einfachheit halber nur der Fall $n = +1$ oder $n = -1$ betrachtet.

Traveling Waves für $\tau = 0$

Dieser Abschnitt zur Berechnung der laufenden Wellen im System ohne Relaxation bezieht sich auf [4]. Sei mit (*), (9) die Form der Traveling Wave gegeben:

$$s = \frac{1}{\rho} = \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} := U(-s - bt) \quad (27)$$

Gesucht ist folglich eine Lösung der Form $U(\xi)$ mit $\xi = -s - bt$ für (25), (26) und den Randbedingungen

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} = u_+$$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} = u_-$$

wobei u_+, u_- konstant sind.

Dafür setzt man nun den Traveling Wave Ansatz (27) in (25), (26) für $\tau = 0$ ein. Unter Verwendung der Kettenregel, kann man das System somit in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführen:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad (28)$$

$$f(U) - V = 0 \quad (29)$$

Gleichung (29) kann umgeformt werden und es ergibt sich (31). Später wird man sehen, dass (28), (29) in dieser Form eine zu einfache Traveling Wave Lösung liefern. Deshalb wird das Problem erschwert zur bekannten *Burgersgleichung* für ein $\eta > 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial s} = \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \right) \quad (30)$$

$$V = f(U) \quad (31)$$

Indem nun (31) in (30) eingesetzt wird mit $\frac{\partial \xi}{\partial t} = -b$ und $\frac{\partial \xi}{\partial s} = -1$, erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$-bU'(\xi) + (f(U(\xi)))' = \eta U''(\xi) \quad (32)$$

Analog zur Herleitung des Kontinuumsmodells wählt man nun einen stochastischen Ansatz und integriert folglich (32):

$$-b \int_{-\infty}^{\xi} U'(a) da + \int_{-\infty}^{\xi} (f(U(a)))' da = \eta \int_{-\infty}^{\xi} U''(a) da \quad (33)$$

Die Randbedingungen

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} = u_{\pm}$$

kann man wegen des Traveling Wave Ansatzes (27) in Abhängigkeit von ξ umschreiben:

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} U(\xi) = u_{\pm}$$

Die Ableitung einer Konstanten führt somit zu :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U'(\xi) = 0$$

Und damit gilt für (33):

$$-b(U(\xi) - u_-) + (f(U(\xi)) - f(u_-)) = \eta(U'(\xi) - 0) \quad (34)$$

Für die Existenz einer Lösung von (32), ist die Existenz der Randbedingungen notwendig. Existieren die Randbedingungen, so folgt mit (34):

$$-b(u_+ - u_-) + f(u_+) - f(u_-) = 0$$

Umformen nach b liefert:

$$b = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

Somit konnte gezeigt werden, dass für die Existenz einer Traveling Wave Lösung die *Rankine-Hugoniot-Bedingung* erfüllt sein muss.

Weiterhin muss auch die *Entropie-Bedingung* untersucht werden. Sei nun $u_- > u_+$, dann gibt es drei mögliche Fälle:

1.) $U'(\xi) = 0$

Das würde bedeuten, dass $U = A$ gelten muss für ein konstantes A , damit $U' = 0$ gilt. Das heißt, nur konstantes U ist als Traveling Wave Lösung möglich.

Dies ist ein verhältnismäßig einfacher Fall, der in der Mathematik zumeist nicht interessant ist. Zudem handelt es sich hierbei um den eigentlich vorliegenden Fall (28), womit man die Erweiterung zur *Burgersgleichung* nun begründen kann.

2.) $U'(\xi) > 0$

Indem dies auf Gleichung (34) angewendet wird, erhält man:

$$-bU + bu_- + f(U) - f(u_-) = \eta U' > 0$$

Insbesondere ist auch die linke Seite der Gleichung größer 0:

$$-bU + bu_- + f(U) - f(u_-) > 0$$

Weiter kann diese Ungleichung nach b umgeformt werden. Dabei wird durch $U - u_-$ geteilt. Da u_- eine Randbedingung ist, ist $U < u_-$. Es wird durch eine negative Zahl geteilt und das Ungleichheitszeichen dreht sich um. Für b wurde schon herausgefunden, dass die *Rankine-Hugoniot-Bedingung* erfüllt ist. Es ergibt sich eine weitere Bedingung (**):

$$\frac{f(U) - f(u_-)}{U - u_-} < b \stackrel{\text{R-H-Bed.}}{=} \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (**)$$

3.) $U'(\xi) < 0$

Dieser Fall kann analog zu Fall 2.) berechnet werden. In der Verkehrsmodellierung ergibt diese Bedingung allerdings keinen Sinn. Falls $U'(\xi) < 0$ ist, muss U eine monoton fallende Funktion sein. U war aber unsere Traveling Wave Lösung. Wie in der Motivation zu diesem Kapitel erklärt wurde, breitet sich die wellenförmige Bewegung aufgrund der Relaxation von vorne nach hinten aus, erreicht folglich jedes einzelne Auto von vorne. Eine monoton fallende Funktion U würde in dem Kontext

eine wellenförmige Bewegung von hinten nach vorne beschreiben. Die Welle würde das Auto von hinten überholen, was im Gegensatz zur Relaxationsausbreitung steht.

Um dies zu verbinden, lassen sich drei wichtige Erkenntnisse festhalten. Der Fall $\tau = 0$ wurde zur *Burgersgleichung* erweitert, da eine konstante Lösung nicht viel über die Traveling Wave Lösung aussagt. Der Fall 2.) ist hier besonders interessant, da er eine zusätzliche Bedingung (**) hervorbringt, damit eine Traveling Wave Lösung der gewünschten Form existiert. Der Fall 3.) ist im Zusammenhang Verkehr unbrauchbar.[4]

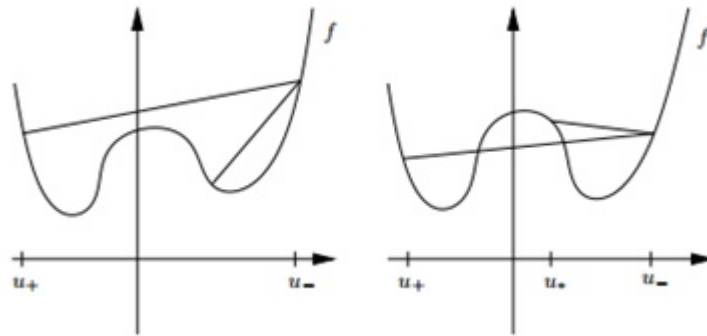


Abbildung 7: Graphische Vorstellung zur Existenz der Traveling Wave Lösung. *Links:* u_- lässt sich ohne Probleme mit u_+ verbinden, also existiert die gewünschte Lösung. *Rechts:* Die Verbindungsgerade schneidet den Graphen von f , d.h. eine Traveling Wave Lösung existiert nicht. Für die Einschränkung auf u_* existiert sie aber doch.

Zusammenfassend kann man nun sehen, dass falls die *Rankine-Hugoniot-Bedingung*, die *Entropie-Bedingung* und in diesem Fall die Bedingung (**) erfüllt sind, so gelten die Randbedingungen. Somit konnte die Traveling Wave Lösung der Form:

$$s = \frac{1}{\rho} = \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} := U(-s - bt) = U(\xi)$$

für den Fall $\tau = 0$ gezeigt werden.

Traveling Waves für das Kontinuumsmodell

Um die Existenz der Traveling Wave Lösung für das makroskopische Verkehrsflussmodell zu zeigen, sollte mit dem System (25), (26) und der Umtransformation (*) in das hier vorgestellte Modell (3), (4), bzw. (12), (13) gearbeitet werden.

Betrachtet man (*) genauer, so muss für die Überführung in das makroskopische Verkehrsflussmodell die Funktion $P'(s)$ als Null gewählt werden. Das liegt darin begründet, dass in dem allgemeinen Modell ein zusätzlicher Relaxationsterm vorhanden ist, der in der Bewegungsgleichung die Veränderung der Geschwindigkeit durch $\frac{\partial u}{\partial m}$ in Abhängigkeit der Relaxation mit einkalkuliert. Dieser Term beschreibt damit eine zusätzliche vorausschauende Beschleunigung, die in dem makroskopischen Verkehrsflussmodell (12), (13) nicht

vorkommt. Dies hat zur Folge, dass die gesuchten Traveling Waves mit dem Modell (25), (26) nicht berechnet werden können, beziehungsweise nur eine konstante Traveling Wave Lösung hervorbringen und damit erneut in den Fall $\tau = 0$ fallen.

Trotzdem soll an dieser Stelle mit dem Modell (25), (26) gearbeitet werden, sodass für allgemeine Funktionen $P'(s)$ und $f(s)$ eine laufende Welle als Lösung gefunden werden kann. Die Betrachtung des Falls $\tau = 0$ sollte dazu dienen, ein Verständnis zu bekommen, warum man im Folgenden die geeigneten Einschränkungen wählt. Diese Einschränkungen sind erforderlich, damit die *Rankine-Hugoniot-Bedingung* und die *Entropie-Bedingung* erfüllt sind, die für die Existenz der Lösung natürlich hervorgingen (vgl. Fall $\tau = 0$).

Zunächst muss das Modell die Voraussetzungen $f', P' \geq 0$ und $f'', P'' \leq 0$ erfüllen, denn dies impliziert, dass das Modell (25), (26) ein hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen beschreibt [7]. Außerdem begründen diese Voraussetzungen die folgenden notwendigen Einschränkungen:

- P, f wachsend auf $[L, \infty)$ für $L > 0$, denn im Verkehr ergibt, wie schon genannt, nur eine wachsende Lösung Sinn
- $f'(\cdot)$ besitzt ein einziges isoliertes Maximum bei $u_* > L$
- $f''(\cdot) < 0$ für $u_* < U < \infty$
- $(P' - f')(\cdot)$ besitzt zwei isolierte Nullstellen u_1, u_2 mit $L < u_1 < u_* < u_2 < \infty$
- $(P' - f')(\cdot) > 0$ auf $(L, u_1) \cup (u_2, \infty)$
- $u_1 < u_* < u_2$ nicht beliebig, sondern erfüllen die *Rankine-Hugoniot-Bedingung*:

$$b = P'(u_*) = \frac{P(u_2) - P(u_1)}{u_2 - u_1}$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass falls für die Randbedingung $u_0 \in (u_1, u_2)$ gilt, so ist die konstante Lösung unstetig und ein Gebrauch von Schockwellen wird nötig (vgl. [7] section 2).

Mit diesen Einschränkungen kann nun gezeigt werden, dass eine Traveling Wave Lösung in der Verkehrsmodellierung existiert. Die Bezeichnung $*$ ist dabei eine Reduzierung, wie man sie sich in Abbildung 7 (rechts) vorstellen kann.

Gesucht ist nun eine Lösung zu (25), (26), die eine Funktion von $\xi = s + bt$ ist, mit der Eigenschaft periodisch in ξ zu sein.

Die Periodizität wird an dieser Stelle benutzt, um ein Kreisverkehrsszenario zu verwenden. Kreisverkehre sind in der Verkehrsmodellierung besonders geeignet, da man eine Hypothese auf einem kleinen Intervall mit wenig Fahrzeugen testen kann, und diesen Sachverhalt wegen der Periodizität leicht auf beliebig große Intervalle erweitern kann.

Die Idee ist nun für

$$\int_{n_s}^{N_s} \frac{1}{\rho(x, t)} dx = l \quad \hat{=} \text{Länge der Straße} \quad (35)$$

$$n_s + N_s = N \quad \hat{=} \text{Anzahl der Autos} \quad (36)$$

eine Traveling Wave Lösung zu finden, unter Verwendung von:

$$s = \frac{1}{\rho} = \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} := U(s + bt) = U(\xi)$$

Für das Vorgehen setzt man dieses Ansatz analog zum Fall $\tau = 0$ in (25) ein:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} = 0$$

Mit $\frac{\partial \xi}{\partial t} = b$ und $\frac{\partial \xi}{\partial s} = 1$, erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$bU' - V' = 0$$

Dieses integriert man nach dem stochastischen Ansatz, muss dabei jedoch die festgelegten Einschränkungen beachten, sodass hier nur von $*$ bis ξ integriert wird:

$$b \int_*^\xi U'(a) da - \int_*^\xi V'(a) da = 0$$

Dies kann ausgerechnet werden, wobei man $*$ wie in den Voraussetzungen benutzt:

$$b(U(\xi) - u_*) - V(\xi) + V_* = 0$$

Formt man nach $V(\xi)$ um, so erhält man:

$$V(\xi) = b(U - u_*) + V_* \quad (37)$$

$$\text{Wähle nun } V_* = f(u_*) \text{ und } u_o = u_* \in (u_1, u_2) \quad (38)$$

Folglich ist nun eine Lösung für (37), (38) gesucht. Mit dem *Capman-Enskog Verfahren* findet man heraus, dass V folgender Form ist:

$$V = v_0 + \tau v_1$$

$$\text{mit } v_0 = f(U)$$

$$\text{und } v_1 = b(P'(U) - b) \frac{\partial U}{\partial s}$$

Dies setzt man ein, wobei für v_1 die Kettenregel benutzt wird mit $\frac{\partial \xi}{\partial s} = 1$:

$$V = f(U) + \tau b(P'(U) - b) \frac{\partial U}{\partial \xi} \quad (39)$$

Setzt man (38), (39) in (37), so stellt sich folgendes heraus:

$$f(U) + \tau b(P'(U) - b) \frac{\partial U}{\partial \xi} = b(U - u_*) + f(u_*)$$

Man formt um zu:

$$f(U) - f(u_*) - b(U - u_*) = \tau b(b - P'(U)) \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

Mit der Voraussetzung $b = P'(u_*)$ ergibt sich:

$$f(U) - f(u_*) - P'(u_*)(U - u_*) = \tau P'(u_*)(P'(u_*) - P'(U)) \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

Danach teilt man durch $U - u_*$ und auf der rechten Seite ergibt sich ein negatives Vorzeichen, indem $P'(u_*)$ und $P'(U)$ vertauscht werden:

$$\frac{f(U) - f(u_*)}{(U - u_*)} - P'(u_*) = \tau P'(u_*) \frac{P'(U) - P'(u_*)}{U - u_*} (-1) \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

Für $U - u_*$ klein genug bildet man aus dem Differenzenquotienten die Ableitung. Dabei wird u_* gewählt und nicht U , da $U > u_*$ nach Voraussetzung gilt. Folglich ist U das Analogon zu $x + h$ und u_* zu x im allgemein verwendeten Differenzenquotienten. Es ergibt sich:

$$f'(u_*) - P'(u_*) = \tau P'(u_*) P''(u_*) (-1) \frac{\partial U}{\partial \xi}$$

Dies lässt sich noch weiter umformen. Dabei ist zu beachten, dass $0 < b < f'(u_*)$ wegen der Voraussetzung " $f'(\cdot)$ besitzt einziges isoliertes Maximum bei u_* " gilt. Daraus folgt mit $b = P'(u_*)$:

$$-(f'(u_*) - P'(u_*)) < 0$$

und wegen $P''(u_*) < 0$, $P'(u_*) > 0$ folgt:

$$\tau P'(u_*) P''(u_*) < 0$$

Insgesamt:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = - \frac{f'(u_*) - P'(u_*)}{\tau P'(u_*) P''(u_*)} > 0$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Da $U' > 0$ gilt, ist die *Entropie-Bedingung* erfüllt. Außerdem ist U eine monoton wachsende Lösung für $u_* \in (u_1, u_2)$, die in

der Verkehrsmodellierung gewünscht ist. Es konnten alle Bedingungen gezeigt werden: die *Rankine-Hugoniot-Bedingung*, (die über die Unstetigkeitsstellen hinweg gilt), die *Entropie-Bedingung* und ein paar wenige andere, die vergleichbar mit der Bedingung (**) aus dem Fall $\tau = 0$ sind. Damit erhält man eine Idee, dass (35), (36) gelöst werden kann. Mit einer geeigneten Wahl der Konstanten und Funktionen kann die Traveling Wave Lösung für das Verkehrsflussmodell (25), (26) konkret berechnet werden.[7]

Insgesamt wurde folglich ein Verkehrsflussmodell in mikroskopischer und makroskopischer Betrachtung gefunden und deren vereinfachte Traveling Wave Lösung erklärt. Des Weiteren konnte die Existenz einer wellenartigen Traveling Wave Lösung für ein allgemeineres Verkehrsflussmodell gezeigt werden.

4 Das Kontinuumsmodell und Traveling Waves in einer Pinguinkolonie

Nachdem der Verkehrsfluss ausgiebig behandelt und erklärt wurde, soll nun das Interesse auf den Fall in der Natur gelenkt werden, das Handeln in einer Kolonie von Kaiserpinguinen.

4.1 Vergleich Verkehr/Pinguine

Die kollektive Verhaltensweise, die in einer Gruppe von Pinguinen entsteht, ist vergleichbar mit dem Stop-and-Go-Verhalten im Verkehrsfluss. Generell entstehen in der Pinguinkolonie ähnliche Bewegungen, da Pinguine aufgrund der Kälte eine Gruppenstruktur bilden, in der sie sich gemeinsam auf einem Wanderabschnitt fortbewegen. Durch die enge Gruppierung, muss jeder Pinguin auf das Verhalten seiner Mitreisenden achten und dies geschieht mit einer Relaxation. Die Pinguine wollen außerdem einen speziellen Abstand zueinander einhalten, um eine gewisse Privatsphäre einzufordern. Dies findet sich im Sicherheitsabstand im Verkehr wieder.

Ferner gibt es drei Effekte, die Traveling Waves im Verkehr auslösen:

- 1) eine globale Bewegung der Gruppe (der Stau verschiebt sich nach hinten, vgl. Abb. 5)
- 2) eine wachsende Dichte
- 3) die Möglichkeit, dass sich einzelne Gruppen vereinigen

Diese Phänomene lassen sich auch in der Pinguinkolonie nachweisen, allerdings mit kleinen Unterschieden:

- jeder Pinguin beachtet nicht nur seinen Vordermann, sondern sechs direkte Nachbarn in seinem Umkreis
- nicht nur ein Pinguin am Anfang der Gruppe verursacht einen 'Pinguinstau', was vergleichbar mit der Situation des Verkehrsstaus am Anfang eines Verkehrsabschnitts ist, sondern jeder beliebige Pinguin kann den Stau durch einen Schritt in eine beliebige Richtung verursachen
- mehrere Pinguine an unterschiedlichen Stellen können zur gleichen Zeit auf die Idee kommen, loslaufen zu wollen, was prinzipiell im Verkehr auch der Fall sein kann, allerdings praktisch kaum vorkommt

Diese Aspekte haben in der Pinguinkolonie zur Folge, dass sich die Wellen nicht nur von vorne nach hinten ausbreiten, sondern in jede beliebige Richtung, je nachdem, in welche Richtung der Pinguin einen Schritt macht. Außerdem können mehrere Traveling Waves auf einmal und von unterschiedlichen Standpunkten ausgelöst werden.[8]

Für ein besseres Verständnis, wie diese Theorie in der Natur wirklich umgesetzt wird, also wie sich Pinguine in einer Kolonie fortbewegen und wie man sich die daraus resultierenden Wellen vorstellen kann, findet man bei [10].

Aufgrund dieser Erkenntnisse soll im Folgenden nur das 1-dimensionale (1D) Modell der Pinguine behandelt werden. Das sorgt dafür, dass nur Pinguine in einer festen Spur betrachtet werden und somit nur einen Vordermann und einen Hintermann besitzen, nicht mehr sechs Nachbarn.

Aus diesem Grund werden nicht nur Traveling Waves von vorne nach hinten betrachtet, wie im Verkehr, sondern auch Wellen von hinten nach vorne.

4.2 Das mikroskopische 1D Modell

An dieser Stelle folgt zunächst eine Einführung in die Modellparameter:

i	$\hat{=}$	i-ter Pinguin (Pinguin $i+1$ läuft hinter Pinguin i)
t	$\hat{=}$	Zeit
$x_i(t)$	$\hat{=}$	Ort/Position(Mittelpunkt)
$x_i^{des}(t)$	$\hat{=}$	Wunschposition
N	$\hat{=}$	Gesamtanzahl der Pinguine
$v_i(t)$	$\hat{=}$	Geschwindigkeit
$v_i^{des}(t)$	$\hat{=}$	Wunschgeschwindigkeit
v_{step}	$\hat{=}$	Gehgeschwindigkeit
d_0	$\hat{=}$	Idealabstand
d_0^{ij}	$\hat{=}$	Abstand zwischen Pinguin i und Pinguin j
d_{th}	$\hat{=}$	Schwellenwertabstand(konst.)
τ	$\hat{=}$	Relaxation
Θ	$\hat{=}$	Indikatorfunktion

Analog zum Aufbau des mikroskopischen Verkehrsflussmodells gibt es zwei Gleichungen. Eine Gleichung für die Geschwindigkeit und eine für die Beschleunigung. Bei Pinguinen gibt es jedoch eine etwas veränderte Grundbeobachtung, die auf das Individuum Pinguin eingeht. Jeder Pinguin hat einen spezifischen Abstand d_0 zu den ihn umgebenden Pinguinen und eine Wunschposition x_i^{des} . Dies ist die minimale rundum Abweichung von d_0 . Da nur das 1-dimensionale Modell betrachtet wird, wird die minimale Abweichung d_0 nur nach vorne und hinten betrachtet. Mathematisch heißt das: x_i^{des} berechnet sich als Minimum von

$$\sum_j (d_0^{ij} - d_0)^2$$

und wegen der 1D Betrachtung konkret als Minimum von f mit

$$f(x) = (|x - x_{i+1}| - d_0)^2 + (|x - x_{i-1}| - d_0)^2$$

Die Wunschgeschwindigkeit v_i^{des} wird beschrieben durch die Indikatorfunktion Θ . Der Pinguin möchte entweder Ruhen (d.h. $v_i^{des} = 0$), falls die Kolonie, bzw. seine nächste Umgebung ruht, oder einen Schritt machen (d.h. $v_i^{des} = v_{step}$), falls sich die Kolonie bewegt, bzw. falls die gewünschte Position x_i^{des} mehr als einen Schwellenwert d_{th} abweicht. Mathematisch ergibt sich somit:

$$v_i^{des} = v_{step} \Theta(x_i^{des} - (x_i + d_{th}))$$

Für die Relaxation τ soll $\tau = \frac{d_{th}}{v_{step}}$ gelten, damit ein verlangsamer Pinguin bei x_i^{des} stehen bleibt. Die Modellparameter v_{step} , d_0 und d_{th} können genauso spezifisch für jeden Pinguin gemessen werden, wie x_i und v_i , die Position und Geschwindigkeit von Pinguin i . Die Wunschposition x_i^{des} kann konkret berechnet werden. [8]

Berechnung der Wunschposition nur unter Berücksichtigung der direkten Nachbarn

Zunächst kann man sich die Wunschposition x_i^{des} wie folgt vorstellen, der betrachtete Pinguin i ist so weit wie möglich von den anderen Pinguinen entfernt (vgl. Abb. 8):

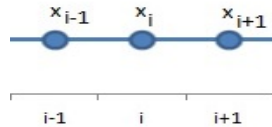


Abbildung 8: Vereinfachte Darstellung der Position von Pinguinen, wobei hier nur ein Vordermann und ein Hintermann betrachtet werden

Die Wunschposition wird mathematisch berechnet als das Minimum von f :

$$\begin{aligned} f(x) &= (| \underbrace{x - x_{i+1}}_{<0} | - d_0)^2 + (| \underbrace{x - x_{i-1}}_{>0} | - d_0)^2 \\ &= (-x + x_{i+1} - d_0)^2 + (x - x_{i-1} - d_0)^2 \\ &= (x^2 - 2xx_{i+1} + 2xd_0 + x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}d_0 + d_0^2) \\ &\quad + (x^2 - 2xx_{i-1} - 2xd_0 + x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}d_0 + d_0^2) \\ &= 2x^2 - 2x(x_{i+1} + x_{i-1}) + x_{i+1}^2 + x_{i-1}^2 + 2d_0(x_{i-1} - x_{i+1}) + 2d_0^2 \end{aligned}$$

Bildet man die erste Ableitung, so fallen alle Terme unabhängig von x weg:

$$f'(x) = 4x - 2(x_{i+1} + x_{i-1})$$

Die zweite Ableitung ist eine positive Zahl, somit handelt es sich tatsächlich um ein Minimum:

$$f''(x) = 4$$

Damit man das Minimum der Funktion konkret berechnen kann, setzt man $f'(x) = 0$ und formt nach x um:

$$x = \frac{x_{i+1} + x_{i-1}}{2} := x_i^{des}$$

Dies ist nun die gesuchte Wunschposition x_i^{des} , die nun auch rechnerisch als der größtmögliche Abstand zu den Nachbarn berechnet wurde.

Gewichtete Berechnung der Wunschposition unter Berücksichtigung der Nachbarn

Wie man gesehen hat, handelt es sich bei diesem Fall um eine vereinfachte Darstellung in der Pinguinkolonie. Deshalb soll nun noch ein weiterer Fall betrachtet werden, der besonders interessant ist, da er sich vom Theoretischen entfernt wird und der Faktor berücksichtigt wird, dass Pinguine individuell handeln.

Es werden nun nicht nur der direkte Nachbar nach vorne und hinten mit einkalkuliert, sondern noch ein weiterer Pinguin in jeder Richtung. Das kann man sich wie in Abbildung 9 vorstellen:

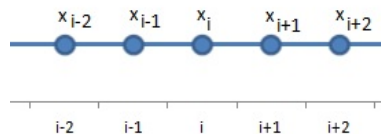


Abbildung 9: Vereinfachte Darstellung der Position von Pinguinen, wobei je zwei Nachbarn in jeder Richtung betrachtet werden

In Abbildung 9 handelt es sich um die Grundposition. Jeder Pinguin hat den größtmöglichen Abstand zu seinen Nachbarn. Gerät die Pinguinkolonie allerdings in Bewegung, verändern sich die Abstände, weil die Pinguine nacheinander einen Schritt in Richtung der Wellenbewegung zu ihren Nachbarn machen.

An dieser Stelle soll nun das mitdenkende Verhalten des Pinguins hinzukommen. Wenn man die Wunschposition x_i^{des} des Pinguins i berechnet, soll berücksichtigt werden, dass der Pinguin, sobald er in der Entfernung einen 'Pinguinstau' sieht, sich mehr in diese Richtung orientiert. Er wählt somit nicht den mittleren Abstand zwischen den zwei direkten Nachbarn, sondern stellt sich etwas weiter in Richtung der höheren Dichte, um sich optimal mit der Kolonie zu bewegen. Das Szenario sieht wie in Abbildung 10 aus.

Auch hier kann man die Wunschposition x_i^{des} mathematisch berechnen. Für die Orientierung in Richtung der höheren Dichte verwendet man Gewichte $\omega < 1$. Die Wunschposition



Abbildung 10: Vereinfachte Darstellung der Position von Pinguinen. Links entsteht ein Stau, weiter rechts haben die Pinguine größere Abstände. Die Wunschposition von Pinguin i sollte einen geringeren Abstand nach links haben, als nach rechts

ergibt sich als Minimum von g mit

$$\begin{aligned}
g(x) &= \underbrace{(|x - x_{i+1}| - d_0)^2}_{<0} + \underbrace{(|x - x_{i-1}| - d_0)^2}_{>0} + \omega \underbrace{(|x - x_{i+2}| - 2d_0)^2}_{<0} + \omega \underbrace{(|x - x_{i-2}| - 2d_0)^2}_{>0} \\
&= (-x + x_{i+1} - d_0)^2 + (x - x_{i-1} - d_0)^2 + \omega(-x + x_{i+2} - 2d_0)^2 + \omega(x - x_{i-2} - 2d_0)^2 \\
&= (x^2 - 2xx_{i+1} + 2xd_0 + x_{i+1}^2 - 2x_{i+1}d_0 + d_0^2) \\
&\quad + (x^2 - 2xx_{i-1} - 2xd_0 + x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}d_0 + d_0^2) \\
&\quad + \omega(x^2 - 2xx_{i+2} + 4xd_0 - 4x_{i+2}d_0 + x_{i+2}^2 + 4d_0^2) \\
&\quad + \omega(x^2 + x_{i-2}^2 + 4d_0^2 - 2xx_{i-2} - 4xd_0 + 4x_{i-2}d_0) \\
&= x^2(2 + 2\omega) + 2x(-x_{i+1} - x_{i-1} - \omega x_{i+2} - \omega x_{i-2}) \\
&\quad - 2d_0(x_{i+1} - x_{i-1} - 2x_{i-2}\omega + 2x_{i+2}\omega) + x_{i-1}^2 + x_{i+1}^2 + 2d_0^2(1 + 4\omega) + \omega(x_{i-2}^2 + x_{i+2}^2)
\end{aligned}$$

Auch hier bildet man die erste Ableitung:

$$g'(x) = x(4 + 4\omega) - 2(x_{i+1} + x_{i-1} + \omega x_{i+2} + \omega x_{i-2})$$

Die zweite Ableitung verifiziert das Minimum mit $0 < \omega < 1$:

$$g''(x) = 4 + 4\omega > 0$$

Damit man das Minimum der Funktion konkret berechnen kann, setzt man $g'(x) = 0$ und formt nach x um:

$$x = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} + \omega(x_{i+2} + x_{i-2})}{2 + 2\omega} := x_i^{des}$$

Alle Modellparameter wurden in den Kontext eingeordnet, sodass sich insgesamt Folgendes für das mikroskopische Modell ergibt:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(t) \quad (40)$$

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{v_i^{des} - v_i(t)}{\tau} \quad (41)$$

In dem Modell können die zwei unterschiedlich berechneten Werte für die Wunschposition verwendet werden.

4.3 Das makroskopische 1D Modell

In Kapitel 2.1 wurde für den Verkehrsfluss gezeigt, wie aus dem mikroskopischen Verkehrsflussmodell das makroskopische entstanden ist. Diese Herangehensweise soll nun auch hier verwendet werden. Man hat gesehen, dass sich zwei Formen des makroskopischen Modells ergeben haben. Zum einen die makroskopische Fassung in der Pseudoinversen definiert (vgl.(12), (13)) und zum anderen das makroskopische Modell in der Dichte definiert(vgl. (3), (4)). Zunächst muss nun die Form der Pseudo-Inversen entwickelt werden. Dies geschieht analog zum Verkehrsfluss mit der Skalierung $\frac{l}{N}$. Die Konstante l entspricht an dieser Stelle der Länge eines Pinguins. Dies muss man jedoch mit der Länge eines Autos vergleichen, sodass mit 'Länge' hier viel mehr die 'Breite' eines Pinguins gemeint ist, folglich der Durchmesser seines Umfangs, den man auf ca. 40 cm verallgemeinern kann. Als Teilchen werden infolgedessen zwar weiterhin Punkte betrachtet, die Länge des Pinguins wird trotzdem mit einkalkuliert.

Wegen der fast sicheren Konvergenz der empirischen Verteilungsfunktion gegen die Verteilungsfunktion, existieren die Grenzwerte und sind eindeutig. Es ergibt sich das System:

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial t} = V(s, t)$$

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} = \frac{v_{des} - V(s, t)}{\tau}$$

Mit $v_{des} = v_{step} \Theta(x_{des} - (u(s, t) - d_{th}))$ erhält man die Modellparameter v_{step} , d_0 , d_{th} . Diese Parameter und τ , das sich aus v_{step} und d_{th} zusammensetzt, können hier als konstant angenommen werden, da es sich um eine makroskopische Veranschaulichung handelt, bei der nicht mehr auf die Bedürfnisse der Pinguine individuell eingegangen wird. In [8] (vgl. subsection 3.1, 3.3) wird erklärt, wie diese Werte experimentell berechnet wurden. Aufgrund eines Zusammenhangs zwischen Beschleunigung und Abstand der Pinguine, kann gezeigt werden, dass durchschnittlich $v_{step} = 1 - 2 \frac{cm}{s}$, $d_0 = 34cm$ und $d_{th} = 1,84 \pm 0,99cm$ in solchen Pinguinkolonien gilt.

Die Wunschposition x_{des} geht aus der Berechnung für das mikroskopische Modell mithilfe der Taylorentwicklung hervor.

Berechnung der Wunschposition nur unter Berücksichtigung der direkten Nachbarn

Zur Erinnerung, zunächst wird nur der direkte Vordermann und Hintermann eines Pinguins i betrachtet (vgl. Abb. 8). Dafür berechnete sich im mikroskopischen Modell für x_i^{des} der mittlere Abstand zwischen den benachbarten Pinguinen. In der Schreibweise, die für die Taylorentwicklung hilfreich ist, ergibt sich in der Pseudoinversen:

$$x_i^{des} = \frac{1}{2} \left(u \left(s - \frac{1}{N}, t \right) + u \left(s + \frac{1}{N}, t \right) \right)$$

Mit der Taylorentwicklung zweiter Ordnung, hier nur in der ersten Komponente, erhält man:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(u(s, t) - \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) - \frac{1}{6} \frac{1}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(u(s, t) + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) + \frac{1}{6} \frac{1}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \end{aligned}$$

Die Terme ungerader Ordnung kürzen sich weg, sodass gilt:

$$\frac{1}{2} \left(2u(s, t) + \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right)$$

Insgesamt gilt dann für die Wunschposition:

$$x_{des} = u(s, t) + \frac{1}{2N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

Gewichtete Berechnung der Wunschposition unter Berücksichtigung der Nachbarn

Analog zum mikroskopischen Modell soll noch ein erschwerter Fall behandelt werden, der das Mitdenken des Pinguins berücksichtigt. Dafür wurden Gewichte $\omega > 0$ benutzt. Die mikroskopische Beschreibung in veränderter Notation lautet:

$$x_i^{des} = \frac{1}{2 + 2\omega} \left(u \left(s - \frac{1}{N}, t \right) + u \left(s + \frac{1}{N}, t \right) + \omega u \left(s - \frac{2}{N}, t \right) + \omega u \left(s + \frac{2}{N}, t \right) \right)$$

Erneut hilft die Taylorentwicklung für den makroskopischen Parameter x_{des} weiter:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 + 2\omega} \left(u(s, t) - \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) - \frac{1}{6} \frac{1}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(u(s, t) + \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) + \frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) + \frac{1}{6} \frac{1}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ & + \frac{\omega}{2 + 2\omega} \left(u(s, t) - \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) + \frac{1}{2} \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) - \frac{1}{6} \frac{8}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ & + \frac{\omega}{2 + 2\omega} \left(u(s, t) + \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) + \frac{1}{2} \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) + \frac{1}{6} \frac{8}{N^3} \frac{\partial^3}{\partial s^3} u(s, t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \end{aligned}$$

Wie man gut erkennen kann, fallen auch hier die Terme ungerader Ordnung weg:

$$\frac{1}{2+2\omega} \left(2u(s,t) + \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) + \omega \left(2u(s,t) + \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right)$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\omega} \left(u(s,t) + \frac{1}{2} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) + \omega \left(u(s,t) + \frac{2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ &= \frac{1}{1+\omega} \left((1+\omega)u(s,t) + \left(\frac{1}{2} + 2\omega\right) \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ &= u(s,t) + \frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1+\omega} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich auch hier für die Wunschposition:

$$x_{des} = u(s,t) + \frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1+\omega} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

Bevor das Modell aufgestellt werden kann, muss noch die Vergleichbarkeit der Parameter, die in der Indikatorfunktion Θ vorkommen, überprüft werden. Zur Erinnerung sollte die Indikatorfunktion Null sein, falls die Kolonie ruht und Eins, falls sie in Bewegung ist. Ab hier wird nur noch der schwierigere Fall für die Wunschposition x_{des} behandelt, nämlich dass jeweils zwei Nachbarn in jede Richtung berücksichtigt werden und der Pinguin die Richtung bevorzugt, die eine höhere Dichte aufweist. Der Fall mit je nur einem Nachbarn, kann analog betrachtet werden, ist jedoch leichter, sodass er vernachlässigt wird. Für die Indikatorfunktion bedeutet das:

$$\begin{aligned} \Theta(x_i^{des} - (x_i + d_{th})) &= \Theta \left(u(s,t) + \frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1+\omega} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) - (u(s,t) + d_{th}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \\ &= \Theta \left(\frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1+\omega} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s,t) - d_{th} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^4}\right) \right) \end{aligned}$$

Um das Verhalten einer Pinguinkolonie anhand dieser Funktion realitätsnah beschreiben zu können, sollte die Indikatorfunktion die Möglichkeit haben, den Wert Eins anzunehmen. Dies ist allerdings nur dann der Fall, wenn d_{th} von der Ordnung $\frac{l}{N^2}$ ist. Andernfalls wäre d_{th} von der Ordnung $\frac{l}{N}$, wohingegen der größte Term von x_{des} , der noch übrig ist, von der Ordnung $\frac{1}{N^2}$ ist, sodass d_{th} immer größer wäre. Das hätte zur Folge, dass die Bedingung des Indikators Θ immer negativ wäre und folglich wäre Θ immer Null. Dies würde in der Natur bedeuten, dass die Pinguine so weit voneinander entfernt stehen, dass sie sich nie so nahe kommen, dass eine kollektive Bewegung entsteht. Die Pinguine hätten gar keine Kolonie gebildet.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann somit angenommen werden, dass d_{th} von der Ordnung $\frac{l}{N^2}$ ist. Mit der makroskopischen Betrachtung von $l = 40cm$ und $d_{th} = 1,84 \pm 0,99cm$, erhält man einen Vergleich von $\frac{1}{N^2}$ zu $\frac{d_{th}}{l} \approx 0,021 - 0,071cm$, wodurch

sich eine gute Approximation ergibt.

Mit dieser Einschränkung hat die Indikatorfunktion die Möglichkeit, sowohl den Wert Null, als auch den Wert Eins anzunehmen, sodass die Kolonie sowohl ruhen, als auch sich fortbewegen kann. Weiter kann gefolgert werden, dass im makroskopischen Modell die Ordnungsterme $\mathcal{O}(\frac{1}{N^4})$ weggelassen werden können, da sie bei einer Betrachtung von $N \rightarrow \infty$ vernichtend klein sind.

Alle Modellparameter konnten nun bestimmt und realistisch eingeordnet werden, sodass sich das makroskopische Modell (definiert in der Pseudoinversen) für eine Pinguinkolonie aufstellen lässt

$$\frac{\partial u(s, t)}{\partial t} = V(s, t) \quad (42)$$

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} = \frac{v_{step} \Theta \left(\frac{1}{2} + 2\omega \frac{1}{1+\omega} \frac{1}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(s, t) - d_{th} \right) - V(s, t)}{\tau} \quad (43)$$

für ein $\omega > 0$.

Obwohl in dieser Arbeit hauptsächlich mit dem Modell in der Pseudoinversen gearbeitet wird (vgl. Kapitel 3), ist auch die Umtransformation in das Dichtemodell interessant.

Indem das makroskopische Verkehrsflussmodell in der Pseudoinversen (vgl. (12), (13)) dem der Pinguinkolonie (vgl. (42), (43)) gegenübergestellt wird, fällt auf, dass die jeweils erste Gleichung identisch ist. Das heißt, dass die Umtransformation dieser Gleichung in eine Dichte parallel funktioniert und sich die Kontinuitätsgleichung (3) ergibt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0$$

Die zweite Gleichung weist bei der Herleitung auch eine gewisse Ähnlichkeit auf, unterscheidet sich jedoch zum Teil anhand der Modellparameter.

Mit der Definition $V(s, t) = v(x, t)$ ergibt sich analog zum Verkehrsfluss Gleichung (24):

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} v(x, t)$$

Außerdem muss die Komponente der Wunschposition umtransformiert werden. Dazu verwendet man erneut die Definition von $u(F(x, t), t) = x$ mit $F(x, t) = s$ und leitet dieses zwei mal nach x ab. Es ergibt sich mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u(s, t)) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \right) \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 0$$

Weiter gilt mit (9):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \rho(x, t) \right) = 0$$

Mit der Produktregel und der Kettenregel kann man dies umformen zu:

$$\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} \rho(x, t) + \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0$$

In dieser Gleichung verwendet man erneut (9) und (16):

$$\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} \rho(x, t) \rho(x, t) + \frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} = 0$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} = -\frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \quad (44)$$

An dieser Stelle wurden alle Funktionen umtransformiert und das makroskopische Modell (definiert in der Dichte) kann aufgestellt werden, indem vor allem (24) und (44) in (43) eingesetzt werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_{step} \Theta \left(-\frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1 + \omega} \frac{1}{N^2} \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x} - d_{th} \right) - v}{\tau} - \frac{\partial v}{\partial x} v \quad (46)$$

An dieser Stelle ist noch nicht ganz klar, warum die Indikatorfunktion Θ ihre beiden möglichen Werte annimmt, das heißt, dass wirklich zwischen ruhenden Pinguinen und Wandernden unterschieden wird. Dafür muss die Bedingung des Indikators genauer behandelt werden und untersucht werden, unter welcher Voraussetzung diese Bedingung positiv ist, also:

$$-\frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1 + \omega} \frac{1}{N^2} \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \rho}{\partial x} - d_{th} > 0$$

Dies kann rückwärts unter Verwendung der Kettenregel umgeformt werden zu:

$$\frac{\frac{1}{2} + 2\omega}{1 + \omega} \frac{1}{N^2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho^2} \right) > d_{th}$$

Danach wird die Ungleichung nach der Ableitung umgestellt und integriert nach x

$$\frac{1}{\rho^2} > C + \left(\frac{1 + \omega}{\frac{1}{2} + 2\omega} 2N^2 d_{th} \right) x$$

für eine Konstante $C > 0$.

Diese Gleichung kann nun nach ρ aufgelöst werden, da eine Interpretation in der Dichte

selbst am einfachsten ist:

$$\rho < \frac{1}{\sqrt{C + \left(\frac{1+\omega}{\frac{1}{2}+2\omega} 2N^2 d_{th}\right) x}}$$

Da für die Konstanten $C > 0$, $\omega > 0$, $N > 0$, $d_{th} > 0$ gilt und die Wurzelfunktion für positive Werte monoton wachsend ist, ist die rechte Seite der Ungleichung monoton fallend in x . Im Ganzen hat das zur Folge, dass die Ungleichung erfüllt sein muss und somit insbesondere die Dichte fallend in x sein muss, damit der Indikator Θ die Möglichkeit hat, den Wert Eins anzunehmen. Nun stellt sich die Frage, ob diese Bedingung auch konsistent zur Realität ist. Dies ist der Fall. Ein Pinguin entscheidet sich genau dann für einen Schritt, wenn der vor ihm wandernde Pinguin schon einen Schritt gemacht hat. Das heißt, dass ein Pinguin sich dann beginnt fortzubewegen, wenn seine ihn umgebene Dichte sinkt, sich der Abstand zu seinem Vordermann vergrößert.

Unter dieser Interpretation wurde das makroskopische Modell in Bezug auf eine Gruppe von Kaiserpinguinen vollständig bestimmt.

Auch hier kann man durch eine geeignete Wahl der Randdaten und Anpassung der Konstanten mit dem Modell (45), (46) verschiedene Sachverhalte darstellen. Für den hier motivierten Fall ist die Simulation einer wandernden Pinguinkolonie besonders interessant.

4.4 Traveling Waves in einer Pinguinkolonie

Mithilfe von Videoaufnahmen oder direkten Beobachtungen, lässt sich sehr schnell in einer wandernden Gruppe von Kaiserpinguinen eine Wellenbewegung erkennen. Weiter stellt sich aber die Frage, ob sich diese Wellen auch rein mathematisch aus dem aufgestellten Modell herleiten lassen. Dazu verwendet man analog zur Verkehrsmodellierung das Modell in der Pseudoinversen definiert (vgl. (42), (43)).

Bei der Berechnung der Traveling Waves im Verkehr konnte nicht direkt mit den Gleichungen in der Pseudoinversen gearbeitet werden. Auch in diesem Fall muss ein anderes Verfahren eingesetzt werden, um das Problem der partiellen Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung zu überführen. Dazu definiert man zunächst eine neue Variable z , die dafür sorgt, dass man sich eine Ableitung höher befindet:

$$z = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Mit dieser Definition ergibt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}$$

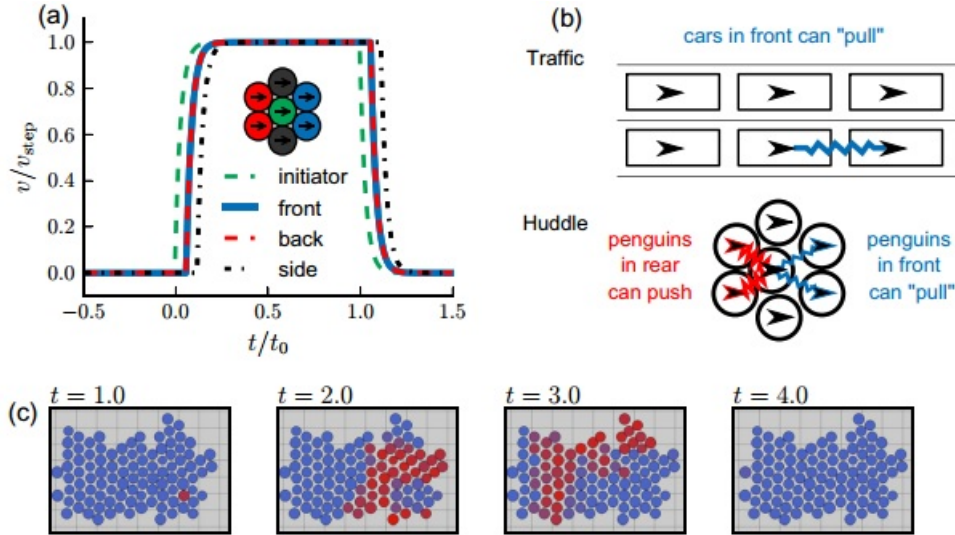


Abbildung 11: (a) beschreibt die Relaxation, d.h. die Reaktion benachbarter Pinguine auf einen auslösenden Pinguin (Initiator), (b) zeigt den Zusammenhang zum Autoverkehr, Traveling Waves in Pinguinkolonien können sich in jede Richtung ausbreiten, (c) beschreibt in welcher Abfolge die Pinguine untereinander reagieren und dadurch die entstehende wandernde Welle

Letztere Gleichung kann man unter Verwendung von (42) vereinfachen zu:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} = \frac{\partial V}{\partial s} \quad (47)$$

Setzt man all diese Zusammenhänge in die Bewegungsgleichung (43) des makroskopischen Pinguinmodells ein, so ergibt sich mit $C_1 := \frac{1}{2+2\omega} \frac{1}{N^2}$:

$$\frac{\partial V(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} v_{step} \Theta \left(C_1 \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} - d_{th} \right) - \frac{1}{\tau} V(s, t)$$

Die Idee bestand darin, eine neue Variable z zu definieren, mit deren Hilfe man in dieser höheren Ableitung auf eine Wellengleichung kommt. Hierfür muss die Gleichung in z definiert nach s abgeleitet werden, wobei man davon ausgeht, dass die Indikatorfunktion Θ durch eine differenzierbare Funktion approximiert wird. Zunächst erhält man daraufhin mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} = \frac{1}{\tau} v_{step} \Theta' \left(C_1 \frac{\partial z}{\partial s} - d_{th} \right) C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial s} \quad (48)$$

Außerdem kann dies mit (47) vereinfacht werden zu:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{\tau} v_{step} \Theta' \left(C_1 \frac{\partial z}{\partial s} - d_{th} \right) C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Zusätzlich muss eine weitere Annahme getroffen werden. Um eine Wellengleichung zu erhalten, muss vorausgesetzt werden, dass die differenzierte Funktion Θ eine konstante Zahl annimmt. Man definiert folglich aus einer Verknüpfung konstanter Zahlen eine vereinfachte Konstante:

$$C_2 := \frac{1}{\tau} v_{step} \Theta' \left(C_1 \frac{\partial z}{\partial s} - d_{th} \right) C_1$$

Damit lässt sich die Wellengleichung mit einem zusätzlichen Dämpfungsterm festhalten:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial z}{\partial t} = C_2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \quad (49)$$

Diese Wellengleichung kann gelöst werden und hat üblicherweise Traveling Waves als Lösung. Aufgabe ist es, diese Behauptung zu verifizieren.

Man verwendet zuerst die Methode *Trennung der Variablen*, sodass sich eine Lösung z der Gleichung (49) allgemein schreiben lässt als:

$$z(s, t) = Z_1(t) Z_2(s) \quad (50)$$

Indem diese Methode in die Gleichung eingesetzt wird, ergibt sich :

$$\left(Z_1''(t) + \frac{1}{\tau} Z_1'(t) \right) Z_2(s) = C_2 Z_2''(s) Z_1(t)$$

Man formt so um, dass jeweils eine Funktionsabhängigkeit auf einer Seite steht. Da die Gleichung für alle s und für alle t gilt, muss die Gleichung einen konstanten Wert annehmen:

$$\frac{Z_1''(t) + \frac{1}{\tau} Z_1'(t)}{Z_1(t)} = \frac{C_2 Z_2''(s)}{Z_2(s)} := \lambda$$

für $\lambda = \text{const}$. Es ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$Z_1''(t) + \frac{1}{\tau} Z_1'(t) = \lambda Z_1(t) \quad (51)$$

$$Z_2''(s) = \frac{1}{C_2} \lambda Z_2 \quad (52)$$

Als Erstes betrachtet man das Teilproblem (51) und bedient sich des *Charakteristischen Polynoms*, indem man dessen Nullstellen berechnet:

$$P(T) = T^2 + \frac{1}{\tau} T - \lambda = 0$$

$$T_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} + \lambda}$$

Da der Radikand negativ ist und das Hauptinteresse in einer reellen Lösung liegt, verwendet man nur den Realteil des Ergebnisses und erhält als Lösung des Teilproblems:

$$Z_1(t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t}$$

Als Zweites behandelt man das Teilproblem (52):

$$Z_2''(s) - \frac{\lambda}{C_2}Z_2 = 0$$

Hier verwendet man eine Traveling Wave Lösung:

$$\varphi(s) = \Phi(s - bt) = \Phi(\xi) \quad (53)$$

Also ergibt sich als Lösung des Teilproblems:

$$Z_2(s) = \varphi$$

Fügt man beide Teilprobleme zusammen, so resultiert aus Gleichung (50):

$$z(s, t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t}\varphi$$

Als nächstes muss die Traveling Wave (53), also die Lösung des Teilproblems Z_2 , nachgewiesen werden. An dieser Stelle besteht nun analog zu dem Traveling Wave Ansatz in der Verkehrsmodellierung die Idee darin, dass die vermutete Lösung $z(s, t)$ und die Differentialgleichung eingesetzt werden (hier in (49)). Dafür müssen zuerst die Ableitungen von z berechnet werden, die in der Gleichung benötigt werden:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = e^{-\frac{1}{2\tau}t}\frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = e^{-\frac{1}{2\tau}t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = e^{-\frac{1}{2\tau}t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{1}{2\tau}t}\varphi$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = e^{-\frac{1}{2\tau}t}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{1}{2\tau}t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{1}{2\tau}t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{4\tau^2}e^{-\frac{1}{2\tau}t}\varphi$$

Die gewünschten Ableitungen werden in (49) eingesetzt. Da in jedem Term der Faktor $e^{-\frac{1}{2\tau}t}$ vorkommt und er ungleich Null ist, kann dieser weggelassen werden und es ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\tau}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{4\tau^2}\varphi + \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2\tau}\varphi\right) = C_2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$$

Man kann dies noch weiter vereinfachen, indem man kürzt und zusammenfasst :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{4\tau^2} \varphi = C_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$$

Als nächstes kann für φ der Traveling Wave Ansatz (49) eingesetzt werden. Damit folgt für die Gleichung unter Verwendung der Kettenregel:

$$b^2 \Phi''(\xi) - \frac{1}{4\tau^2} \Phi(\xi) = C_2 1^2 \Phi''(\xi)$$

Dies kann vereinfacht werden zu:

$$(b^2 - C_2) 4\tau^2 \Phi''(\xi) = \Phi(\xi)$$

Es handelt sich um eine homogene Differentialgleichung der Form

$$y'' + 2fy' + gy = 0$$

für Konstanten f und g . Diese gewöhnliche Differentialgleichung kann explizit berechnet werden. Man verwendet:

$$y = e^{\mu s} \quad y' = \mu e^{\mu s} \quad y'' = \mu^2 e^{\mu s}$$

Dies setzt man in die homogene Differentialgleichung ein und verwendet erneut, dass die Exponentialfunktion ungleich Null ist. Danach berechnet man eine Lösung für μ :

$$\mu^2 + 2f\mu + g = 0$$

$$\mu_{1,2} = -f \pm \sqrt{f^2 - g}$$

Für μ ergeben sich somit drei prinzipiell vorkommende Möglichkeiten:

1. Fall: $\psi^2 := f^2 - g > 0$
2. Fall: $\psi^2 := f^2 - g = 0$
3. Fall: $\psi^2 := f^2 - g < 0$

Übertragen auf die hergeleitete Gleichung gilt $y = \Phi$ und die Konstanten f und g können konkret angegeben werden :

$$f = 0$$

$$g = -\frac{1}{(b^2 - C_2) 4\tau^2}$$

Infolgedessen lässt sich ψ berechnen:

$$\psi^2 = 0^2 + \frac{1}{(b^2 - C_2)4\tau^2}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{(b^2 - C_2)4\tau^2}}$$

Das hat zur Folge, dass **Fall 2** entfällt, da alle vorkommenden Konstanten ungleich Null sind und außerdem $C_2 < 0$ gilt. Letzteres begründet sich in der Herleitung des Dichtemodells, in der gezeigt wurde, dass die Dichte monoton fallend in x ist.

Beginnt man mit **Fall 1**, so ist der Radikand in der Lösung von μ positiv, folglich ist die Lösung reellwertig. Es ergibt sich mit μ_1 und μ_2 :

$$\Phi_1 = e^{(-f+\psi)\xi} = e^{\psi\xi}$$

$$\Phi_2 = e^{(-f-\psi)\xi} = e^{-\psi\xi}$$

Für die Traveling Waves ergibt sich dann mit berechnetem ψ :

$$\begin{aligned}\Phi(\xi) &= \tilde{C}_1\Phi_1 + \tilde{C}_2\Phi_2 \\ &= \tilde{C}_1e^{\psi\xi} + \tilde{C}_2e^{-\psi\xi}\end{aligned}$$

Für diese Gleichung müssen noch geeignete Randwerte betrachtet werden. Die Variable s ist wegen des Zusammenhanges zur empirischen Verteilungsfunktion auf das Intervall $[0, 1]$ eingeschränkt (vgl. Unterkapitel 2.1). Wegen (53) gilt:

$$\varphi(s) = \varphi(\xi + bt) = \Phi(s - bt) = \Phi(\xi)$$

Folglich sollte ξ auf das Intervall $[-bt, 1 - bt]$ eingeschränkt werden und die Randwerte werden überprüft:

$$\Phi(-bt) = \tilde{C}_1e^{-\psi bt} + \tilde{C}_2e^{\psi bt}$$

$$\Phi(1 - bt) = \tilde{C}_1e^{\psi(1-bt)} + \tilde{C}_2e^{\psi(bt-1)}$$

Beide Randwerte sind in Abhängigkeit von t und für beliebiges t unbeschränkt. Für $t \rightarrow \infty$ hätte das wegen des Zusammenhanges $\rho = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^{-1} = \frac{1}{z}$ zur Folge, dass die Dichte im Randwert gegen Null geht, folglich die Pinguine immer so weit auseinander stehen, dass es zu keinem kollektiven Verhalten kommt und somit auch zu keinen Traveling Waves. Um die Randwerte für beliebige t gültig zu machen, muss die zugehörige Konstante auf Null gesetzt werden. Es ergibt sich:

$$\Phi(\xi) = \tilde{C}_1e^{\psi\xi}$$

Da nun die Gültigkeit für die Funktion Φ bestimmt wurde, kann die Lösung z betrachtet werden:

$$z(s, t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \tilde{C}_1 e^{\psi(s-bt)} = \tilde{C}_1 e^{\psi(s-bt) - \frac{t}{2\tau}}$$

Es stellt sich wieder die Frage nach den Randwerten. Da für beliebig großes t die Funktion z gegen Null geht, können die Randwerte ohne Probleme bestimmt werden:

$$z(0, t) = \tilde{C}_1 e^{\psi(0-bt) - \frac{t}{2\tau}} = \tilde{C}_1 e^{-\psi bt - \frac{t}{2\tau}}$$

$$z(1, t) = \tilde{C}_1 e^{\psi(1-bt) - \frac{t}{2\tau}}$$

Für eine gewählte Stoßwellengeschwindigkeit b und eine Zeit t ergeben sich folglich konstante Randwerte. Es wurde also eine reellwertige Traveling Wave Lösung gefunden:

$$z(s, t) = \tilde{C}_1 e^{\psi(s-bt) - \frac{t}{2\tau}} \quad (54)$$

$$s \in [0, 1] \quad (55)$$

Da mit der Berechnung der Traveling Wave Lösung auch eine konkrete Lösung z gefunden wurde, kann damit die Dichtefunktion ρ hergeleitet werden. Denn es gilt dieser Zusammenhang:

$$z(s, t) = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{\rho(x, t)}$$

Zunächst wird die Funktion $u(s, t)$ berechnet, indem man z integriert:

$$\int z(s, t) ds = \int \tilde{C}_1 e^{\psi(s-bt) - \frac{t}{2\tau}} ds = \frac{\tilde{C}_1}{\psi} e^{\psi(s-bt) - \frac{t}{2\tau}} = u(s, t)$$

Man befindet sich noch in der falschen Variablen, der Pseudoinversen, weshalb eine Rücktransformation durch $u(F(x, t), t) = x$ vorgenommen werden muss. Durch einsetzen erhält man:

$$u(F(x, t), t) = \frac{\tilde{C}_1}{\psi} e^{\psi(F(x, t) - bt) - \frac{t}{2\tau}} = x$$

Weiter folgt die Berechnung der Umkehrfunktion, sodass $F(x, t)$ konkret angegeben werden kann. Man teilt durch die Konstanten und verwendet, dass $\ln(a)$ die Umkehrfunktion von e^a ist:

$$F(x, t) = \frac{1}{\psi} \left(\ln\left(\frac{\psi}{\tilde{C}_1} x\right) + \frac{t}{2\tau} \right) + bt$$

Dadurch ergibt sich für $z(F(x, t), t)$:

$$z(F(x, t), t) = \frac{1}{\rho(x, t)} = \tilde{C}_1 e^{\psi \left(\frac{1}{\psi} \left(\ln \left(\frac{\psi}{C_1} x \right) + \frac{t}{2\tau} \right) + bt - bt \right) - \frac{t}{2\tau}} = \psi x$$

Insgesamt konnte man nun die Dichtefunktion ρ in Abhängigkeit der Konstanten ψ bestimmen. Für ein geeignetes b und die Umtransformation in der Konstanten C_2 von $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ durch einsetzen der berechneten Funktionen $u(F(x, t), t)$ zu $\psi^2 x$, kann ψ konkret berechnet werden. Somit ist die gefundene Dichte geeignet:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\psi x}$$

Als nächstes wird **Fall 3** betrachtet, bei dem der Radikand der Lösung μ negativ ist und sich folglich eine komplexe Lösung ergibt:

$$\Phi_1 = e^{(-f+i\psi)\xi} = e^{i(\psi\xi)}$$

$$\Phi_2 = e^{(-f-i\psi)\xi} = e^{-i(\psi\xi)}$$

Weiter verwendet man die *Eulersche Formel*;

$$e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

sodass sich mit μ_1 und μ_2 folgendes ergibt:

$$\Phi_1(\xi) = \cos(\psi\xi) + i \cdot \sin(\psi\xi)$$

$$\Phi_2(\xi) = \cos(-\psi\xi) + i \cdot \sin(-\psi\xi)$$

$$= \cos(\psi\xi) - i \cdot \sin(\psi\xi)$$

Man folgert die Traveling Wave Lösung mit berechnetem ψ :

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= \hat{C}_1 (\cos(\psi\xi) + i \cdot \sin(\psi\xi)) + \hat{C}_2 (\cos(\psi\xi) - i \cdot \sin(\psi\xi)) \\ &= (\hat{C}_1 + \hat{C}_2) \cos(\psi\xi) + (\hat{C}_1 - \hat{C}_2) i \cdot \sin(\psi\xi) \end{aligned}$$

Auch für diese Lösung müssen geeignete Randwerte gefunden werden. Da die Konstanten \hat{C}_1, \hat{C}_2 komplexwertig sind, kann es in der Lösung zu beliebigen Kombinationen aus der Sinusfunktion und aus der Kosinusfunktion kommen. Für den Bezug zur Natur, in der die Kaiserpinguine leben, ist eine positive Lösung wünschenswert. Dafür können die

Konstanten wie folgt gewählt werden:

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \cos(\psi\xi)$$

$$\hat{C}_1 - \hat{C}_2 = i \cdot \sin(\psi\xi)$$

Dann gilt nämlich für die Traveling Wave mit dem *Additionstheorem* des Kosinus und $i^2 = -1$:

$$\Phi(\xi) = \cos(\psi\xi)\cos(\psi\xi) - \sin(\psi\xi)\sin(\psi\xi) = \cos(\psi\xi + \psi\xi) = \cos(2\psi\xi)$$

Die Kosinusfunktion ist positiv auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, sodass ξ auf das Intervall $[0, \frac{\pi}{4\psi}]$ eingeschränkt werden muss.

Man hätte die Konstanten \hat{C}_1, \hat{C}_2 auch analog über das *Additionstheorem* des Sinus bestimmen können. Dann hätte man jedoch wegen der Phasenverschiebung des Sinus zum Kosinus ein größeres Intervall erhalten. Aufgrund der Allgemeingültigkeit der Randwerte, ist die Lösung aber insbesondere nur auf dem kleineren Intervall verbindlich.

Nun muss erneut wegen (53) der Zusammenhang zur Variablen s hergestellt werden, die nur auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert ist. Dafür muss erneut folgender Zusammenhang gelten:

$$\varphi(s) = \varphi(\xi + bt) = \Phi(s - bt) = \Phi(\xi)$$

Somit gibt es zwei Einschränkungen für ξ , die miteinander verbunden werden müssen:

$$\xi \in [0, \frac{\pi}{4\psi}] = [-bt, 1 - bt]$$

Randbedingungen müssen für beliebige Zeit gelten, sodass $b = 0$ gelten muss und $\frac{\pi}{4\psi} = 1$. Auch hier muss eine Rücktransformation zu der Funktion z geschehen. Zunächst ergibt sich für z mit der gefundenen Teillösung Φ und $b = 0$:

$$z(s, t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(2\psi(s - 0t)) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(2\psi s)$$

Da die Variable s wegen der Abhängigkeit zur empirischen Verteilungsfunktion im Intervall $[0, 1]$ liegt, ergibt sich mit $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $1 = \frac{\pi}{4\psi}$ für die Randwerte:

$$z(0, t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(2\psi 0) = e^{-\frac{1}{2\tau}t}$$

$$z(1, t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(2\psi) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

Es werden jedoch auch hier konstante Randbedingungen gebraucht. Wenn allerdings die Wellengeschwindigkeit $b = 0$ ist, so gibt es keine Traveling Wave, folglich sind die Pinguine so weit auseinander, dass kein Wanderverhalten entsteht. Das hat außerdem zur Folge, sollten Pinguine in so großen Abständen wandern wollen, so bestünde eine sehr große

Relaxation. Für $\tau \rightarrow \infty$ gilt $\frac{1}{2\tau}t \rightarrow 0$ und somit gilt für die Randbedingungen:

$$z(0, t) \approx e^0 = 1$$

$$z(1, t) = 0$$

Infolgedessen sind die Randwerte für beliebiges t konstant, sodass sich eine komplexwertige Lösung ergibt, die jedoch im Sachzusammenhang nicht realistisch ist:

$$z(s, t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} \cos(2\psi s) \quad (56)$$

$$s \in [0, 1] \quad (57)$$

Der Fall $\tau = 0$

Das Modell sollte auch in Bezug auf seine Tauglichkeit ohne Relaxation überprüft werden. Es handelt sich dabei um die Vereinfachung, dass Pinguine nicht erst zeitverzögert auf ihre Nachbarn reagieren. Um auf die wandernden Wellen in einer derartigen Simulation zu schließen, wird zum Beispiel Gleichung (48) für $\tau = 0$ betrachtet. Es bleibt übrig:

$$\frac{\partial V}{\partial s} = v_{step} \Theta' \left(C_1 \frac{\partial z}{\partial s} - d_{th} \right) C_1 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = v_{step} \frac{\partial}{\partial s} \Theta \left(C_1 \frac{\partial z}{\partial s} - d_{th} \right)$$

Mit dem Zusammenhang $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial s}$ und Gleichung (49) ergibt sich dann:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_{step} \frac{\partial}{\partial s} \Theta \left(C_1 \frac{\partial z}{\partial s} - d_{th} \right) = 0$$

Das heißt, die Dämpfung ist Null, was sich eben genau auch mit der Realität abdecken lässt. Wenn es keine Relaxation gibt, beziehungsweise $\tau \rightarrow 0$ gilt, dünnen sich die wandernden Wellen aus, je weniger Relaxation vorhanden ist. Genau dies war zu erwarten, denn entweder stehen die Pinguine so weit auseinander, dass es zu keinem kollektiven Verhalten kommt, oder sie marschieren alle in gleichem Tempo, was in der Realität kaum möglich ist, sodass es zu keinem Stop-and-Go und somit zu keinem sogenannten 'Pinguinstau' kommt. Da das Modell sich auch in dieser Betrachtung so verhält, wie man es in der Natur erwartet hätte, erscheint die Wahl der Modellparameter und derer Zusammenhänge geeignet.

Insgesamt konnte mit diesem Verfahren die Existenz von Traveling Wave Lösungen bei einer Relaxation gezeigt werden, wobei eine reellwertige Lösung (vgl. (54), (55)) und eine Komplexe (vgl. (56), (57)) gefunden wurde. Es sollte festgehalten werden, dass mit dieser Berechnung nun auch mathematisch gezeigt werden konnte, dass in einer Pinguinkolonie modelliert durch (42) und (43) wandernde Wellen existieren. Wie man an den Lösungen jedoch erkennen kann, handelt es sich um sehr einfache Traveling Waves und weniger um richtige Wellen. Das liegt an den Einschränkungen des Modells, die vorgenom-

men werden mussten, um zunächst diesen vereinfachten Fall mathematisch zu verstehen. Bei wandernden Kaiserpinguinen entstehen tatsächlich wellenförmige Bewegungen, indem sich die Pinguine an dem Fortbewegungsdrang ihrer Nachbarn orientieren. Es wäre eine vertiefendere Aufgabe ein Modell zu erstellen, das noch näher an der Realität liegt und durch die Erschwerung wellenförmige Traveling Waves berechnen kann.

Entstehung der Traveling Waves

Nachdem ausgiebig die Berechnung und das Vorkommen der wandernden Wellen in einer Pinguinkolonie diskutiert und erläutert wurden, stellt sich die Frage, wann und warum diese Wellen überhaupt entstehen. Im Verkehrsstau hat man schon gesehen, dass es zu einem Unfall beziehungsweise einer Störung auf einer Verkehrsspur kommen muss, sodass der Verkehrsfluss gebremst wird. Da die Fahrzeuge nicht alle gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit losfahren können und sich zudem weitere Fahrzeuge ans Ende der Schlange anschließen, kommt es zu einem Stop-and-Go Verkehr und somit zu wandernden Wellen.

Bei einer Pinguinkolonie muss nicht erst ein Mitglied verunglücken, damit diese Wellen entstehen, sondern es handelt sich um ein ganz natürliches Phänomen bei Wanderungen oder bei Rotationsbewegungen als Kälteschutz in einer ruhenden Kolonie.

Wenn man von einer Anfangsposition mit Idealabstand jedes Pinguins ausgeht, kommt es trotzdem innerhalb kürzester Zeit zu Traveling Waves. Die Fehlanordnung in einer Gruppe von Pinguinen wird ausgedrückt durch eine Störgröße. Bei dieser Störgröße handelt es sich um die Standardabweichung $\sigma = stdev(d_{ij})$. Diese tritt schon in einer Zeit von weniger als zwei Schritten der Pinguine auf. Dies wird allein durch das Gehverhalten der Pinguine begründet, was sich wenig mit der Idealposition im Anfangszustand vereinbaren lässt. Dieser Störfaktor sorgt ab $\sigma > 0,25$ für eine Unordnung zur Anfangsaufstellung, indem die Pinguine mit Nachbarn kollidieren oder individuell entgegen der Masse arbeiten. Das Anstoßen oder zu starke Vergrößern des Abstandes hat ein relaxiertes Verhalten der benachbarten Pinguine zur Folge und löst somit die wandernden Wellen aus.[8]

5 Fazit

Es konnte in dieser Arbeit durch Veranschaulichung an Beispielen gezeigt werden, dass wandernde Wellen in makroskopischen Bewegungsmodellen existieren. Die mathematische Modellierung konnte durch den Sachzusammenhang verdeutlicht werden und erklären, wie die Parameter hervorgehen.

Aufbauend auf Kapitel 2, in dem die Modelltypen mikroskopisch und makroskopisch anhand des Verkehrsflusses eingeführt wurden, gab Kapitel 3 einen Einblick in die unterschiedlichen Sichtweisen und die Existenz von Traveling Waves im Straßenverkehr. Dabei wurde ein passendes makroskopisches Modell hergeleitet, das sich auch mit allgemeinen Verkehrsflussmodellen vereinbaren lässt. Das erlangte Verständnis über die Dichte und die Geschwindigkeit in diesem Modell, brachte die Idee der wandernden Welle hervor. Leider konnten für das entwickelte makroskopische Modell nur vereinfachte Traveling Waves, nämlich die im Verkehr ohne Relaxation gezeigt werden. Infolgedessen wurde lediglich die Existenz einer wellenförmigen Lösung im allgemeineren Verkehrsflussmodell gezeigt.

Bei der Suche nach einer Schnittstelle zwischen den beiden Kontexten, wurde im vierten Kapitel erneut ein makroskopisches Bewegungsmodell aufgestellt, allerdings mit Parametern, die versuchen eine Kolonie von Kaiserpinguinen so realitätsnah wie möglich zu modellieren. Zunächst wurde der mikroskopische Fall veranschaulicht und anhand dessen das makroskopische Modell aufgestellt, das wegen der Vergleichbarkeit zum Verkehr nur eindimensional erfolgen konnte. Um durch diese Vereinfachung den Sachzusammenhang nicht zu vernachlässigen, wurde eine Gewichtung vorgenommen, um das Selbstdenken des Pinguins zu modellieren. Die Gewichte sorgten dafür, dass ein Pinguin nicht nur die Idealposition zwischen seinen Nachbarn einnimmt, sondern seine Position vorausschauend der Gruppendynamik anpasst, wie es in der Natur der Fall ist. In diesem Zusammenhang ließen sich wandernde Wellen berechnen, die jedoch einerseits auf einfache Traveling Waves als reellwertige Lösung zurückführten und andererseits zu einer nicht realistischen komplexwertigen Lösung führten.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Beispiele konnten zwar realitätsnah mathematisch modelliert werden, brachten dadurch jedoch nur einfache Ergebnisse. Es lässt sich festhalten, dass dieser einfache Fall veranschaulicht am Straßenverkehr und einer Pinguinkolonie geholfen hat, makroskopische Bewegungsmodelle zu verstehen, in denen die gewünschten wellenförmigen Traveling Waves jedoch nicht auftraten.

Eine vertiefendere Aufgabe könnte darin bestehen, die Modelle an das allgemeine Verkehrsflussmodell anzupassen, um wellenförmige Traveling Waves zu erhalten. Außerdem wäre eine Erforschung des mehrdimensionalen makroskopischen Modells, mit mehr als zwei direkten Nachbarn, interessant, welches wandernde Wellen in verschiedene Richtungen hervorbringen könnte. Die visualisierte Veranschaulichung zur Ausbreitung der wandernden Wellen in Form von Simulationen könnte in diesem Fall eine größere Rolle spielen. Wenn in mehrdimensionalen makroskopischen Pinguinmodellen mathematische Zusammenhänge auftreten, könnten Rückschlüsse auf Verkehrsstaus gezogen werden und gegebenenfalls kann dies neue Erkenntnisse zur Eindämmung und Vermeidung von Staus liefern.

Abbildungsverzeichnis

1	ZUSTANDSGRÖßEN: [1]	3
2	ABSTAND: http://de.wikipedia.org/wiki/Zeitl\protect\unhbox\voidb@x\bgroup\U@D1ex{\setbox\z@\hbox{\char127}\dimen@-.45ex\advance\dimen@ \ht\z@\fontdimen5\font\dimen@}\accent127\fontdimen5\font\U@Du\egroup entnommen am 08.05.2015	4
3	RELAXATION: http://www.civil.iitb.ac.in/tvm/1100_LnTse/509_lnTse/plain/plain.html entnommen am 08.05.2015	4
4	VERTEILUNGSFUNKTION: Z. Kabluchko, Skript <i>mathematische Statistik</i> , S.23, siehe http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/WS1415/Statistik/daten/Skript_Math_Statistik.pdf	7
5	VERSCHIEBUNG DES STAU: http://trafficwaves.org/ entnommen am 08.05.2015	11
6	ENTSTEHUNG VON UNSTETIGKEIT: http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-05228-6_8/fulltext.html entnommen am 08.05.2015	12
7	TRAVELING WAVES GRAPHISCH INTERPRETIERT: [4]	16
8	POSITIONIERUNG DER PINGUINE ZUR ANFANGSBEDINGUNG	23
9	PINGUINPOSITIONIERUNG (BETRACHTET JE 2 NACHBARN)	24
10	PINGUINPOSITIENIERUNG BEI ANKOMMENDEN WANDERNDEN WELLEN	25
11	WANDERNDE WELLE IN PINGUINKOLONIE: [8]	32

Literatur

- [1] M. Treiber, A. Kesting. *Traffic Flow Dynamics. Data, Flow and Simulation*. Springer-Verlag, 2013, S. 52-53
- [2] M. Burger *Mathematische Modellierung*. Skript, 2010, S. 24-29
- [3] G. Alsmeyer, S. Gröttrup, A. Winkler. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, SS 2013, Übungsblatt 1 <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS13/WT/Aufgaben/Blatt1.pdf> entnommen am 08.05.2015
- [4] C. Eck, H. Garcke, P. Knaber. *Mathematische Modellierung*. Springer, 2011, S. 361-363
- [5] <http://trafficwaves.org/> entnommen am 08.05.2015
- [6] <http://www.math.uni-konstanz.de/~dreher/skripten/sw-rdgl.pdf> entnommen am 08.05.2015
- [7] J.M. Greenberg *Congestion Redux*. In: SIAM J. APPL. MATH. Vol.64, No.4, pp. 1175-1185 , 2004
- [8] R.C. Gerum, B. Fabry, C.Metzner, M.Beaulieu, A. Ancel, D.P. Zitterbart *The origin of traveling waves in an emperor penguin huddle*. In: NEW JOURNAL OF PHYSICS 15, pp.17, 2013
- [9] A.Aw, A.Klar, T.Materne, M.Rasclé *Derivation of Continuum Traffic Flow Models from Microscopic Follow-the-Leader Models*. In: SIAM J. APPL. MATH., pp. 1-20, 2002, S. 1-3
- [10] <http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/12/125022/media> entnommen am 8.5.2015, zu finden in [8]
- [11] <http://www.vwi.tu-dresden.de/~treiber/movie3d/> entnommen am 8.5.2015