

# Kinetische Modelle für Schwarmverhalten

BACHELORARBEIT

vorgelegt am: 09. Juli 2012

am Fachbereich Mathematik und Informatik der Westfälischen  
Wilhelms-Universität Münster



Name: Steffen Keul  
Matrikelnummer: 356413  
Studiengang: Mathematik 1-Fachbachelor  
Erstgutachter: Prof. Dr. Martin Burger  
Zweitgutachter: Dr. Frank Wübbeling

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlegende Modelle</b>	<b>5</b>
1.1	Selbstantriebs, Abbremsungs, und Anziehungs–Abstoßungs-Partikel Modell . . . . .	5
1.2	Cucker-Smale Partikel-Modell der Schwarmbildung . . . . .	7
1.2.1	Cucker-Smale Partikel-Modell der Schwarmbildung . . . . .	7
1.2.2	Theorem1 . . . . .	8
1.3	Kinetische Modelle . . . . .	11
1.3.1	Boltzmann Gleichung . . . . .	11
1.3.2	Mean-Field Limit . . . . .	14
1.4	Erweiterte Cucker-Smale-Modelle . . . . .	16
1.4.1	Sichtkegel und spontane Anführer . . . . .	16
1.4.2	Das Cucker-Smale Partikel Modell mit Führungsverhalten: . . . . .	17
1.4.3	Das Cucker-Smale Kinetik Modell mit Führungsverhalten . . . . .	18
1.5	Nichtlineare Störungen . . . . .	18
1.5.1	Das Cucker-Smale Partikel Modell mit Störungen . . . . .	18
1.5.2	Das Cucker-Smale Kinetik Modell mit nichtlinear abhängigen Störungen: . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Cutoff Funktionen</b>	<b>21</b>
2.1	Abgeändertes C-S Modell . . . . .	21
2.1.1	Cutoff Funktion . . . . .	22
2.1.2	Abstoßung . . . . .	22
2.1.3	Anziehung . . . . .	22
2.1.4	Randkraft . . . . .	23
2.2	Warum stetige Cutoff Funktionen? . . . . .	24
2.3	Kinetisches Modell . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Selbstorganisierendes System und Active Sets</b>	<b>26</b>
3.0.1	Modell im nichthomogenen Phasenraum . . . . .	26
3.1	Active Sets . . . . .	27
3.1.1	Definition 1 . . . . .	28
3.1.2	Lemma 1 . . . . .	28
3.1.3	Definition 2 (Active Sets) . . . . .	29
3.1.4	Theorem 2.1 . . . . .	29
3.1.5	Theorem 2.2 . . . . .	31
3.1.6	Lemma 2 . . . . .	31
3.1.7	Theorem 3 . . . . .	32
3.2	Ein oder mehrere Anführer in einer Gruppe . . . . .	33
3.2.1	Definition 3 . . . . .	33
3.2.2	Theorem 4 . . . . .	34
3.3	Kinetisches Modell . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Anwendungsbereiche</b>	<b>36</b>
4.1	Darwin . . . . .	36
4.2	Virtuelle Schwärme . . . . .	36
4.3	Synthetisiertes Schwarmverhalten . . . . .	36

## Abbildungsverzeichnis

1	Drei-Zonen-Modell . . . . .	5
2	Verhaltensbereiche: Modell 2.1 . . . . .	7
3	Ergebnisse für versch. Anfangsbedingungen Modell 2.1 . . . . .	7
4	Kommunikationsfunktion $\gamma = \frac{1}{2}$ . . . . .	8
5	Kommunikationsfunktion $\gamma = \frac{1}{9}$ . . . . .	8
6	Kommunikationsfunktion $\gamma = \frac{1}{10}$ . . . . .	8
7	Angleichung der Abstände und Geschwindigkeiten . . . . .	11
8	Vergleich C-S-Partikel gegen C-S-Kinetisch für $\gamma < \frac{1}{2}$ . . . . .	15
9	Vergleich C-S-Partikel gegen C-S-Kinetisch für $\gamma > \frac{1}{2}$ . . . . .	16
10	Sichtkegel 1 . . . . .	16
11	Dreiecksformen . . . . .	17
12	Cutoff Funktion . . . . .	22
13	Sichtkegel 2 . . . . .	23
14	Beispiel Einfluss große Gruppe auf kleine Gruppe . . . . .	26
15	Aktive Set . . . . .	29
16	Anführer . . . . .	33

## Vorwort

Jeder von uns hat sicher schon einmal im Garten gesessen, zum Himmel geschaut und beobachtet, wie sich ein Schwarm Vögel einheitlich von links nach rechts bewegt oder wogend seine Kreise zieht. Auch bei vielen Fischen und auch Landherdentieren ist dieses Verhalten zu beobachten. In der vorliegenden Arbeit soll es nun darum gehen, dieses Phänomen mathematisch darzustellen.

Zunächst wird mit sehr grundlegenden Annahmen an einzelne Individuen des Schwarms in Partikelmodellen, zum Beispiel mit dem Drei-Phasen-Modell[JC10], eine Basis geschaffen. Darauf aufbauend werden dann verschiedene Effekte, die biologisch sinnvoll erscheinen, wie etwa ein Sichtkegel oder ein Anführer, angeknüpft, um das in der Realität zu beobachtende Verhalten möglichst genau zu modellieren. Parallel dazu wird dargestellt, wie man solche Modelle für sehr große Ansammlungen von Individuen einfacher darstellen kann. Dafür wird in dieser Arbeit der kinetische Ansatz dienen. Er erlaubt uns, nicht mehr nur das einzelne Individuum zu betrachten, sondern das Verhalten des ganzen Schwarms mit nur einer Differentialgleichung über dessen Dichte zu beschreiben.

Das Modellieren von Schwärmen ist dabei noch eine recht junge Disziplin. Einen ersten Ansatz machte der Software-Ingenieur Craig Reynolds. Dieser beobachtete während der Mittagspause eine Gruppe Amseln auf einem Friedhof. Trotz starker Bemühungen konnte er keinen „Anführer“ ausfindig machen, der für das einheitliche Verhalten aller Tiere verantwortlich war. 1987 entwarf er dann ein Computerprogramm, indem er Regeln, die er festgestellt zu haben glaubte, einbaute[Bal00]:

1. Auf die anderen Tiere achten und sich an deren Geschwindigkeit anpassen.
2. Zusammenstöße vermeiden.
3. Zur Mitte der Gruppe tendieren.

Eine andere Herangehensweise entwickelten in den frühen 1990er Jahren die ungarischen Physiker Tamas Vicsek und Andras Czirók. Diese beobachteten, dass sich manche Bakterien nicht als Individuum bewegten, sondern sich zu Ringen zusammenschlossen. Sie formulierten ein zu dem von Reynolds sehr ähnlichen Modell, nur modellierten sie alle Zellen mit derselben Geschwindigkeit. Allerdings beinhaltet ihr Modell Störungen, die die Zellen ziellos umherwandern lassen[Bal00]. Das kann passieren, wenn einzelne den Kontakt zur Gruppe verlieren oder Einflüsse von Außen in das System dringen.( vgl. [Bal00]). Das in dieser Arbeit aber vornehmlich benutzte Modell von Felipe Cucker und Steve Smale wurde 2007 veröffentlicht[FC07b]. Zu Beginn betrachten wir aber ein drei Phasenmodell, was im Weiteren vorgestellt wird.

# 1 Grundlegende Modelle(vgl. [JC10])

Was ist eigentlich ein Schwarm? Und warum ist es interessant, sich mit einem solchen zu befassen?

Ein Schwarm ist ein Zusammenschluss von einigen wenigen (5-10) bis hin zu Millionen von Individuen. Vogelschwärme, Fischeschwärme, Insekten Schwärme aber auch Bakterienkolonien oder einfache Schafherden fallen darunter. Interessant ist, dass es oft so aussieht, als ob alle Mitglieder der Gruppe zu wissen scheinen, wohin die Reise gehen soll und immer in einer gewissen Formation bleiben. Auch ist normalerweise keine Art von Führer der Gruppe zu erkennen, was das Ganze noch erstaunlicher macht.

Ein möglicher Anfang, an die Modellierung solcher Schwärme heran zu treten, sind die *grundlegenden Prinzipien*[JC10] der Schwärme. Sie beschreiben das Sozialverhalten der Tieren in ihrer einfachsten Form, zum einen die Tendenz in einer Gruppe sein zu wollen, also eine anziehende und verdichtende Kraft. Sie kann verschiedene biologische Gründe haben, zum Beispiel der Schutz vor Fressfeinden, die gemeinsame Nahrungssuche, die Partnersuche oder auch Erleichterung bei der Fortbewegung. Zum Andern ist da das Verlangen nach einer gewissen Menge Platz, um zum Beispiel Kollisionen zu vermeiden, also eine abstoßende Kraft. Als Drittes gibt es die Tendenz die Bewegungsrichtung der Gruppe zu halten, eine angleichende Kraft.

Diese sehr allgemeinen und einfachen Regeln sind abhängig von der Position und der Geschwindigkeit der Individuen und lassen sich in einem *Drei-Zonen-Modell*[JC10] gut darstellen. Die drei Zonen heißen *repulsion* (Abstoßung), *alignment* (Orientierung), *attraction* (Anziehung)[JC10] und beschreiben Bereiche um jedes Individuum. Die Stärke der einzelnen Kräfte ist nun davon abhängig, wie viele Gruppenmitglieder sich in den verschiedenen Zonen befinden und welchen Abstand sie zu einem betrachteten Individuum haben. Davon abhängig werden sich dann die Geschwindigkeit und die Richtung der Fortbewegung entwickeln.

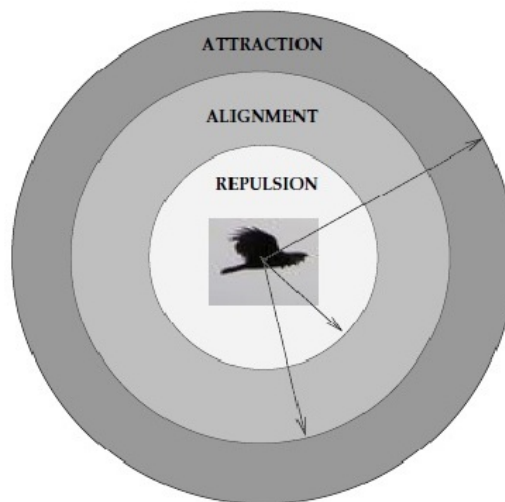


Abbildung 1: [JC10] S. 3

Diese Überlegungen erheben noch keinen Anspruch, die Realität richtig darzustellen, doch sie können benutzt werden, um Modelle zu erarbeiten, die dann für die verschiedenen Arten von Tieren oder Fortbewegung angepasst werden können. Ein erstes Modell wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

## 1.1 Selbstantriebs, Abbremsungs, und Anziehungs–Abstoßungs-Partikel Modell

Die relevanten Informationen, um die Entwicklung der Bewegung eines Individuums darzustellen, ist zum einen die Änderung der Position, also die Geschwindigkeit, und die Änderung der Geschwindigkeit, also die Beschleunigung. Letztere ist gerade der Teil, in dem sich die erwähnten

Überlegungen bemerkbar machen. Im *Selbstantriebs, Abbremsungs, und Anziehungs-Abstoßungs-Partikel Modell* besteht sie aus zwei Teilen. Der erste Teil,

$$\frac{\tilde{d}v_i}{dt} = (\alpha - \beta|v_i|^2)v_i$$

bestimmt die Geschwindigkeit, die ein einzelnes Individuum annehmen würde, wenn niemand sonst in der Nähe wäre.  $\alpha$  repräsentiert dabei den Selbstantrieb des Individuums, also den Wunsch, sich in einer gewissen Geschwindigkeit fort zu bewegen.  $\beta$  ist hingegen ein Reibungswiderstand, der abbremsend wirkt. Asymptotisch ergibt sich für diesen Term dann

$$|v| = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Im zweiten Teil der Gleichung wird nun die Stärke der Interaktion der verschiedenen Individuen bestimmt. Dazu werden alle Einflüsse der Gruppenmitglieder auf das betrachtete  $i$ -te Individuum aufsummiert. Wie stark der Einfluss letztendlich ist wird mit Hilfe des *Morse-Potentials*  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben. (Das ursprüngliche Einsatzgebiet dieses Potentials ist die Molekularphysik, in der es zur Beschreibung des elektrischen Potentials zweiatomiger Moleküle in Abhängigkeit zu ihrem Abstand benutzt wird [mor].)

$$\frac{\tilde{d}v_i}{dt} \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla U(|x_i - x_j|).$$

Genauer ist

$$U(x) = k(|x|), \quad k(r) = -C_A e^{\frac{-r}{l_A}} + C_R e^{\frac{-r}{l_R}}.$$

Dabei bezeichnet  $l_A, l_R$  die Länge oder Reichweite der Anziehung(A)-Abstoßung(R),  $C_A, C_R$  die Stärke der Anziehung-Abstoßung und  $r$  den Abstand.

### Selbstantriebs, Abbremsungs, und Anziehungs-Abstoßungs-Partikel Modell (vgl. [JC10]S. 4 f)

Kombiniert man beide Teile, ergibt sich das folgende Modell,

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = (\alpha - \beta|v_i|^2)v_i - \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \nabla U(|x_i - x_j|) \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, N, \quad U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \alpha, \beta > 0$$

Für verschiedene Anfangsdaten ergeben sich bei der Auswertungen nun Gebilde, die man auch in der Natur beobachten kann. Zu nächst sollte man anmerken, dass gewisse Anfangswerte nicht unbedingt sinnvoll sind, zum Beispiel wenn die Reichweite der Abstoßung höher ist als die der Anziehung. Biologisch angemessen sind also die Bereiche  $\frac{C_R}{C_A} > 1$  und  $\frac{l_R}{l_A} < 1$ . Nun lassen sich zwei verschiedene Verhaltensweisen beobachten:

1. Stabilität: Für  $Cl^d > 1$  bilden die Individuen Gruppen mit optimalem Abstand, eine quasi kristalline Formation.

2. Katastrophe: Für  $Cl^d < 1$  bilden sich Kreisformationen, teilweise auch Doppelkreise, in denen die Individuen gegeneinander rotieren. Dabei wird, bei passenden Anfangsbedingungen, eine konstante Geschwindigkeit erreicht, die wieder  $|v| = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  beträgt. Dabei sind beide Verhaltensweisen eher zu beobachten, wenn die Zahl der Individuen sehr groß ist.

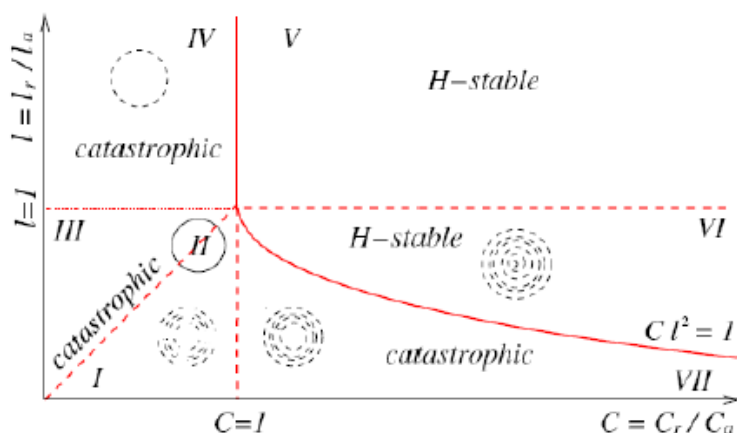


Abbildung 2: [JC10] S. 5

Dieses Modell ist sehr intuitiv und basiert auf einfachen Annahmen. Ein Problem ist allerdings, dass sehr viele Parameter zur Verfügung stehen, die zu Beginn gewählt werden müssen, nämlich  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $C_A$ ,  $C_R$ ,  $l_A$ ,  $l_R$ . Gleichzeitig führen kleinste Unterschiede zu völlig anderen Ergebnissen. Siehe folgende Graphiken.

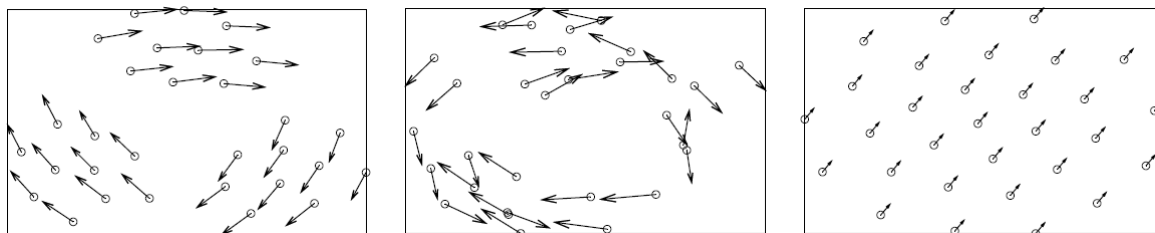


Abbildung 3: ([JC10] S. 27) Hier Modell 2.1 mit  $\alpha = 0,07/0,15/0,2$ ,  $\beta = 0,05/0,05/0,1$  und  $C = 2.5/0,5/2.5$

## 1.2 Cucker-Smale Partikel-Modell der Schwarmbildung

Das Folgende von Felipe Cucker und Steve Smale entwickelte Modell ist eines der wichtigsten und grundlegenden und arbeitet mit nur einem Anpassungsterm. Dieser mittelt alle Geschwindigkeitsunterschiede des betrachteten Individuums zu jedem Gruppenmitglied. Die Stärke, mit der die verschiedenen Individuen Einfluss aufeinander nehmen, hängt von deren gegenseitigem Abstand ab. Je näher sich zwei Individuen sind, desto stärker beeinflussen sie sich gegenseitig, je weiter weg, desto weniger.

### 1.2.1 Cucker-Smale Partikel-Modell der Schwarmbildung (vgl. [JC10] S. 6)

Das Modell lautet:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(|x_i - x_j|)(v_j - v_i) \end{cases}$$

mit  $i=1, \dots, N$ ,  $N$  Anzahl der Individuen und  $H$  eine Kommunikationsrate

$$H(x) = a(|x|), \quad a(r) = \frac{K}{(\sigma^2 + |r|^2)^\gamma}$$

mit positiven  $K, \sigma$  und  $\gamma > 0$

H hängt, wie beschrieben, vom Abstand zweier Individuen ab und skaliert dabei die Stärke, mit der der Geschwindigkeitsunterschied ( $v_j - v_i$ ) in die Ableitung der Geschwindigkeit einfließt. Wie stark dabei der Abfall der Einflusskurve ist, hängt wieder von den gewählten Parametern ab.

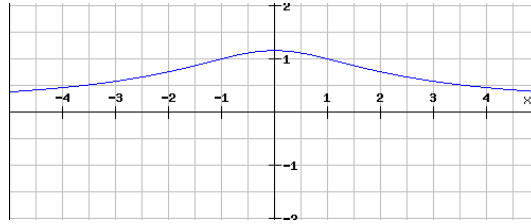


Abbildung 4:  $H(x) = \frac{2}{(3+|r|^2)^{\frac{1}{2}}}$

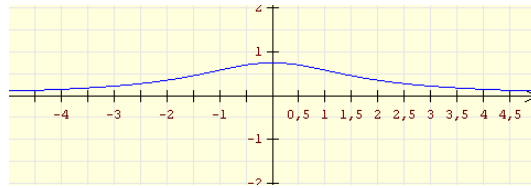


Abbildung 5:  $H(x) = \frac{2}{(3+|r|^2)^{\frac{9}{10}}}$

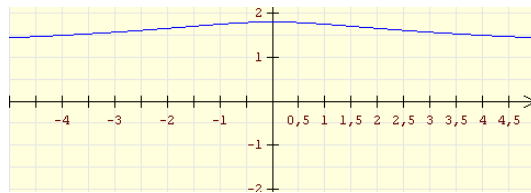


Abbildung 6:  $H(x) = \frac{2}{(3+|r|^2)^{\frac{1}{10}}}$

Wie im ersten Partikel-Modell auch, hängt von den Anfangsbedingungen und den Parametern ab, wie sich das System im Laufe der Zeit verhalten wird. Seien für  $x, v \in \mathbb{R}^{d \times N}$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |x_i - x_j|^2 \quad \text{und} \quad \Lambda(v) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |v_i - v_j|^2$$

die Hälfte der aufsummierten, quadrierten Abstände bzw Geschwindigkeiten, also eine Art Maß für den relativen Abstand und Geschwindigkeit, zum ganzen Schwarm.

### 1.2.2 Theorem1 (vgl. [FC07a][FC07b])

Sei  $x(t)$  eine Lösung des Cucker-Smale Partikel-Modell der Schwarmbildung und nehme an, es gelte eine der drei Bedingungen:

- i  $\gamma < \frac{1}{2}$
- ii  $\gamma = \frac{1}{2}$  und  $\Lambda_0 < ((\omega K)^2/8)$
- iii  $\gamma > \frac{1}{2}$  und

$$\left[ \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} - \left( \frac{1}{2\gamma} \right)^{\frac{2\gamma}{2\gamma-1}} \right] \left( \frac{(\omega K)^2}{8\Lambda_0} \right)^{\frac{1}{2\gamma-1}} > 2\Gamma_0 + \sigma^2$$

Dann existiert ein konstantes  $B_0$ , so dass  $\Gamma(x(t)) \leq B_0$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}$ .  $\Lambda(v(t))$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  und die Vektoren  $x_i - x_j$  streben gegen einen beschränkten Vektor  $\hat{x}_{ij}$



(Um das Theorem zu beweisen, werden ein paar Hilfslemmata benötigt. Die Beweise sind in [FC07a]S. 855 ff zu finden.)

Bezeichne  $\Phi_t = \min_{\tau \in [0, t]} \phi_\tau$  das Minimum der *Fiedler Zahl* [FC07a] (zweiten Eigenwerte)

**Hilfslemma 1:** Für alle  $t \geq 0$  gilt

$$\lambda(t) \leq \Lambda_0 e^{-2t\Phi_t}$$

**Hilfslemma 2:** Für  $T > 0$  gilt,

$$\Gamma(T) \leq 2(\Gamma_0 + \frac{\Lambda_0}{\Phi_T^2})$$

**Hilfslemma 3:** Sei  $A$  eine nicht negative, symmetrische Matrix,  $L = A - D$  der Laplace-Operator,  $\phi$  die Fiedler Zahl und  $\mu = \min_{i \neq j} a_{ij}$ . Dann ist  $\phi \geq \frac{1}{2}\nu\mu$  genauer, wenn  $a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2)$  ist, dann ist

$$\phi \geq \frac{1}{2}\nu\mu(\Gamma(x))$$

**Hilfslemma 4:** Sei  $c_1, c_2 > 0$  und  $s > q > 0$ , dann besitzt die Gleichung

$$F(Z) = z^s - c_1 z^q - c_s = 0$$

genau eine positive Nullstelle  $z_*$ . Außerdem gilt

$$z_* \leq \max\{(2c_1)^{\frac{1}{s-q}}, (2c_2)^{\frac{1}{s}}\}$$

und  $F(z) \leq 0$  für  $0 \leq z \leq z_*$ .

Beweis Theorem 1 [FC07a]:

Mit Hilfslemma 3 ergibt sich für alle  $x \in X$

$$\phi_x \geq \frac{\omega K}{2(\sigma^2 + \max_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2)^\beta} \leq \frac{\omega K}{2(\sigma^2 + \Gamma_x)^\beta}.$$

Sei  $t^* \in [0, t]$  der Punkt, der  $\Gamma$  in  $[0, t]$  maximiert, dann ist

$$\Phi_t = \min_{\tau \in [0, t]} \phi_\tau \geq \min_{\tau \in [0, t]} \frac{\omega K}{2(\sigma^2 + \Gamma(\tau))^\beta} \geq \frac{\omega K}{2(\sigma^2 + \Gamma(t^*))^\beta}.$$

Mit Hilfslemma 2 gilt die Abschätzung

$$\Gamma(t) \leq 2\Gamma_0 + 8\Lambda_0 \frac{(\sigma^2 + \Gamma(t^*))^{2\beta}}{(\omega K)^2} \quad (1)$$

und da  $t^*$   $\Gamma$  in  $[0, t]$  maximiert, macht es das auch in  $[0, t^*]$ . Somit ergibt sich für (1) mit  $t = t^*$ ,

$$(\sigma^2 + \Gamma(t^*)) - 8\Lambda_0 \frac{(\sigma^2 + \Gamma(t^*))^{2\beta}}{(\omega K)^2} - (\omega\Gamma_0 + \sigma^2) \leq 0. \quad (2)$$

Setze nun  $z = \Gamma(t^*) + \sigma^2$ ,  $a = \frac{8\Lambda_0}{(\omega K)^2}$  und  $b = 2\Gamma_0 + \sigma^2$ . Dann kann (2) umgeschrieben werden zu  $F(z) \leq 0$  mit

$$F(z) = z - az^{2\beta} - b.$$

**Zu i)** Nehme an, dass  $\beta < \frac{1}{2}$  ist. Mit Hilfslemma 1 und  $f(z) \leq 0$  folgt, dass  $z = (\sigma^2 + \Gamma(t^*)) \leq U_0$  mit

$$U_0 = \max\left\{\left(\frac{16\Lambda_0}{(\omega K)^2}\right)^{\frac{1}{1-2\beta}}, 2(2\Gamma_0 + \sigma^2)\right\}.$$

Deshalb ist  $\Gamma(t^*) \leq B_0 := U_0 - \sigma^2$  und da  $B_0$  unabhängig von  $t$  ist, folgt für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Gamma(t) \leq B_0$ . Daraus folgt, dass  $\phi_t \geq \frac{\omega K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$ . Deshalb gilt dies auch als Grenze für  $\Phi_t$ . Mit Hilfslemma 1 folgt

$$\Lambda(t) \leq \Lambda_0 e^{-\frac{\omega K}{(\sigma^2 + B_0)^\beta} t}$$

Das bedeutet gerade, dass  $\Lambda(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Damit gilt für alle  $T > t$

$$\begin{aligned} \|x(T) - x(t)\| &= \left\| \int_t^T v(s) ds \right\| \leq \int_t^T \|v(s)\| ds \leq \int_t^T \frac{1}{\omega} \Lambda^{\frac{1}{2}}(s) ds \\ &\leq \int_t^T \frac{1}{\omega} \Lambda_0^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\omega K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} s} ds \\ &= \left[ \frac{1}{\omega} \Lambda_0^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{2(\sigma^2 + B_0)^\beta}{\omega K} \right) e^{-\frac{\omega K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} s} \right]_t^T \\ &= \frac{2\Lambda_0^{\frac{1}{2}} (\sigma^2 + B_0)^\beta}{\omega^2 K} \times \left( e^{-\frac{\omega K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} T} - e^{-\frac{\omega K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} t} \right) \\ &\leq \frac{2\Lambda_0^{\frac{1}{2}} (\sigma^2 + B_0)^\beta}{\omega^2 K} \left( e^{-\frac{\omega K}{2(\sigma^2 + B_0)^\beta} t} \right) \end{aligned}$$

Da der hintere Teil gegen 0 tendiert und unabhängig von  $T$  ist, folgt, dass ein  $\hat{x} \in X$  existiert, so dass  $x \rightarrow \hat{x}$ .

**Zu ii)** Nehme an, dass  $\beta = \frac{1}{2}$  ist, dann erhält (2) die Form

$$(\sigma^2 + \Gamma(t^*)) \left(1 - \frac{8\Lambda_0}{(\omega K)^2}\right) - (2\Gamma_0 + \sigma^2) \leq 0.$$

Diese impliziert

$$\Gamma(t^*) \leq B_0 := \frac{2\Gamma_0 + \sigma^2}{1 - \frac{8\Lambda_0}{(\omega K)^2}} - \sigma^2.$$

Beachte, dass  $B_0 > 0$ , wenn  $\Lambda < \frac{(\omega K)^2}{8}$  ist und fahre analog zu **zu i)** fort.

**Zu iii)** Nehme an, dass  $\beta > \frac{1}{2}$  ist und sei  $\alpha = 2\beta$ , dann gilt  $F(z) = z - az^\alpha - b$ . Die Ableitung  $F'(z) = 1 - \alpha az^{\alpha-1}$  hat nun genau eine Nullstelle  $z_* = \frac{1}{\alpha a}^{\frac{1}{\alpha-1}}$  und

$$\begin{aligned} F(z_*) &= \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - a \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - b \\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - b \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] - b \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Da jetzt  $F(0) = -b < 0$  und  $F(z) \rightarrow -\infty$  für  $z \rightarrow \infty$  gilt, ergibt sich für  $F(t)$  eine Art umgedrehte Parabelform. Obwohl  $t^*$  als eine Funktion von  $t$  nicht stetig ist, ist es die Abbildung  $t \mapsto \Gamma(t^*) + \sigma^2$  und somit auch die Abbildung  $t \rightarrow F(\Gamma(t^*) + \sigma^2)$ . Dies zeigt zusammen mit (2), dass für alle  $t \geq 0$   $F(\Gamma(t^*) + \sigma^2) \leq 0$  ist. Zusammen mit  $t = 0$  und damit auch  $t^* = 0$  und

$$\begin{aligned} \Gamma_0 + \sigma^2 &\leq 2\Gamma_0 + \sigma^2 = b \\ &< \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left[ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] \\ &< \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ &= z_* \end{aligned}$$

folgt, dass  $\Gamma_0 + \sigma^2 < z_l$  ist, wobei  $z_l$  gerade die kleinste Nullstelle von  $F$  auf  $\mathbb{R}_+$  ist. Zusammen mit der Stetigkeit der Abbildung  $t \mapsto \Gamma(t^*) + \sigma^2$  folgt, für alle  $t \geq 0$ ,

$$\Gamma(t^*) + \sigma^2 \leq z_l \leq z_*,$$

somit auch

$$\Gamma \leq B_0 := \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \sigma^2 = \left(\frac{(\omega K)^2}{8\alpha\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \sigma^2.$$

Erneutes Vorgehen wie in **Zu i)** und  $\beta = \gamma$  liefern die Behauptung.  $\square$   
Das Theorem besagt also, wenn die Anfangsbedingungen passen, wird jeder Abstand zu einem

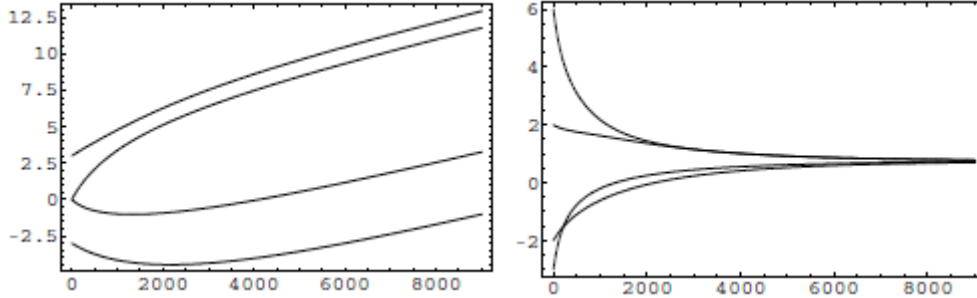


Abbildung 7: [[JC10] S. 6] links die Abstände, rechts die Geschwindigkeiten

anderen Individuum gegen einen konstanten Wert konvergieren. Zudem gleichen sich mit der Zeit die Geschwindigkeiten an, das heißt, dass sich am Ende alle Individuen in einer speziellen aber festen Formation bewegen. Interessant ist außerdem, dass für  $\gamma \leq \frac{1}{2}$  das Ergebnis weder von  $N, d$  oder den Anfangsbedingungen des Systems abhängt. Dieses Verhalten heißt *unconditional flocking*[JC10], also unbedingte Schwarmbildung. Die Population wird zu einer einheitlichen Geschwindigkeit und zu festen Abständen tendieren, egal welche Anfangswerte für Position und Geschwindigkeit der Individuen gelten. Zudem ist anzumerken, dass die Formation nicht gleichmäßig also kristallartig sein muss. Für  $\gamma \geq \frac{1}{2}$  geschieht die Formationsbildung, wenn die Gruppe genügend dicht zusammen und genügend langsam, zum Beispiel für  $\Gamma(0)$  und  $\Lambda(0)$  sehr klein und  $K$  groß ist.

### 1.3 Kinetische Modelle

Die oben beschriebenen Modelle mögen für eine kleine Anzahl von Individuen sehr gut sein, doch haben sie einen großen Nachteil. Je größer die Anzahl wird, desto schwieriger wird es, für jedes einzelne Individuum die Differentialgleichungen zu lösen. Zudem wird die Simulation auch immer schwieriger. Man kann sich behelfen, indem man die Ideen der kinetischen Gas-Theorie benutzt. Sie beschreibt unter anderem die Bewegungsvorgänge der Teilchen im Gas über den Verlauf der Dichte des Gases. Dieser hängt von der räumlichen Position, der Geschwindigkeit und dem Zeitverlauf ab und beinhaltet zudem noch stochastische Einflüsse[*gas*]. Auf diese Weise ist zwar der Einfluss jedes einzelnen Individuums auf ein anderes nicht mehr genau zu bewerten, da zwei Individuen miteinander interagieren, auch wenn sie weit voneinander entfernt sind. Dafür muss nicht mehr jedes Individuum simuliert werden, sondern das kollektive Verhalten kann nun durch eine mesoskopische partielle Differentialgleichung bestimmt werden. Dabei ist  $f(x, v, t)$  die Dichte der Individuen mit Position  $x \in \mathbb{R}^d$ , Geschwindigkeit  $v \in \mathbb{R}^d$  und in der Zeit  $t \geq 0$ ,  $d \geq 1$ .

#### 1.3.1 Boltzmann Gleichung (vgl. [JC10] S. 7 ff)

Im folgenden benutzen wir eine grundlegende Differentialgleichung der kinetischen Gastheorie: die Boltzmann-Gleichung. Sie beschreibt die Verteilung von Teilchen in einem Medium und wird vor allem bei Strömungen in verdünntem Gas verwendet, also wenn nicht zu viele Teilchen vorhanden sind und die Abstände zwischen diesen signifikant groß sind[*bol*]. Zu Beginn sein  $(x, v)$  ( $y, w$ ) die Position und die Geschwindigkeit zweier Individuen. Dann beschreibt

$$v^* = \psi(x, v; y, w)$$

$$w^* = \psi(y, w; x, v)$$

deren Geschwindigkeit nach einer Interaktion und  $w_* = \psi(y, w; x, v)$  beziehungsweise  $v_* = \psi(x, v; y, w)$  vor einer Interaktion. Dabei ist  $\psi(x, v; y, w)$  eine Interaktionsregel. Dies führt uns zu der Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\right)(x, v, t) = Q(f, f)(x, v, t),$$

wobei

$$Q(f, f)(x, v) = \epsilon \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{J(x, v; y, w)} f(x, v_*) f(y, w_*) - f(x, v) f(y, w)\right) dw dy.$$

$J(x, v; y, w)$  ist die Jacobimatrix der Transformation von  $(v, w)$  zu  $(v^*, w^*)$  mit  $\psi$  und  $Q$  ein stochastischer Interaktionsoperator, der die Interaktion von den verschiedenen Paaren beschreibt.

Nun benutzt man die in den Partikelmodellen entwickelten Interaktionsregeln. Daraus ergeben sich:

1.  $\psi(x, v; y, w) = v + \eta[(\alpha - \beta|v|^2)v - \nabla U(|x - y|)]$
2.  $\psi(x, v; y, w) = [1 - \eta a(|x - y|)]v + \eta a(|x - y|)w$

(Wobei hier natürlich auch beliebige andere Regeln verwendet werden können, um zum Beispiel zusätzliche Effekte zu beschreiben, wie etwa die Art der Fortbewegung.)

Um nun die Jacobimatrix in der Gleichung zu umgehen, betrachten wir die schwache Form der Boltzmann-Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x, v) f(x, v, t) dv dx + \int_{\mathbb{R}^{2d}} (v \cdot \nabla_x \varphi(x, v)) f(x, v, t) dv dx \\ &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\varphi(x, v^*) - \varphi(x, v)) f(x, v, t) f(y, w, t) dv dx dw dy \end{aligned}$$

für  $t > 0$  und alle schönen Funktionen  $\varphi$  mit kompaktem Träger, so dass

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x, v) f(x, v, t) dx dv = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x, v) f_0(x, v) dx dv$$

Diese Form ist etwas leichter zu handhaben. Wenn wir nun eine Taylorentwicklung von  $\varphi(x, v^*)$  in  $(v^* - v)$  bis zur Ordnung zwei durchführen, erhält die schwache Form des Interaktionsintegrals folgende Form:

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\varphi(x, v^*) - \varphi(x, v)) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw \\ &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\nabla_v \varphi(x, v) \cdot (v^* - v)) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw \\ &+ \epsilon \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{4d}} \left[ \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi(x, \tilde{v})}{\partial v_i^2} (v_j^* - v_j)^2 \right] f(x, v) f(y, w) dx dv dy dw \end{aligned}$$

für  $v^* - v = \eta[(\alpha - \beta|v|^2)v - \nabla U(|x - y|)]$

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\varphi(x, v^*) - \varphi(x, v)) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw \\ &= \epsilon \eta \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\nabla_v \varphi(x, v) \cdot [(\alpha - \beta|v|^2)v - \nabla U(|x - y|)]) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw \end{aligned}$$

$$+\epsilon \frac{\eta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{4d}} \left[ \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi(x, \tilde{v})}{\partial v_i^2} [(\alpha - \beta|v|^2)v - \nabla U(|x-y|)]_j^2 \right] f(x, v) f(y, w) dx dv dy dw$$

für  $v^* - v = \eta a(|x-y|)(w-v)$

$$\epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\varphi(x, v^*) - \varphi(x, v)) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw$$

$$= \epsilon \eta \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\nabla_v \varphi(x, v) \cdot (w-v)) a(|x-y|) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw$$

$$+\epsilon \frac{\eta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^{4d}} \left[ \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 \varphi(x, \tilde{v})}{\partial v_i^2} (w_j - v_j)^2 \right] a(|x-y|)^2 f(x, v) f(y, w) dx dv dy dw$$

Wähle nun  $\eta \rightarrow 0$  als Grenzwert so, dass  $\eta \ll 1$  und  $\epsilon \eta = \lambda$  konstant und  $\epsilon \eta^2 \ll \lambda$  sind, zum Beispiel wenn die Stärke der Interaktion sehr klein ist. Es reicht der erste Term, um den Interaktionsoperator gut zu approximieren. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varphi(x, v) f(x, v, t) dv dx + \int_{\mathbb{R}^{2d}} (v \cdot \nabla_x \varphi(x, v)) f(x, v, t) dv dx \\ &= \begin{cases} \lambda \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\nabla_v \varphi(x, v) \cdot [(\alpha - \beta|v|^2)v - \nabla U(|x-y|)]) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw & \text{für 1)} \\ \lambda \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\nabla_v \varphi(x, v) \cdot (w-v)) a(|x-y|) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dv dy dw & \text{für 2)} \end{cases} \end{aligned}$$

In der starken Variante erhalten wir zwei entsprechende nichtlineare Gleichungen:

**1. Selbstantriebs, Abbremsungs, und Anziehungs–Abstoßungs-Kinetik Modell ([JC10] S. 9):**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \lambda [(\nabla_x U * \rho) \cdot \nabla_v f - \nabla_v \cdot ((\alpha - \beta|v|^2)vf)]$$

mit

$$\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} d(x, v, t) dv$$

und  $*$  ist die Faltung nach  $x$ .

**2. Das Cucker-Smale Kinetik Modell der Schwarmbildung ([JC10] S. 10):**

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \lambda \nabla_v \cdot [\xi(f)f]$$

mit

$$\xi(f)(x, v, t) = [(H(x)\nabla_v W(v)) * f] = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{K(v-w)}{(\sigma^2 + |x-y|^2)^\beta} f(y, w, t) dy dw$$

und  $W(v) = \frac{1}{2}|v|^2$ ,  $H(x) = a(|x|)$ , und  $*$  ist die Faltung nach  $(x, v)$ .

### 1.3.2 Mean-Field limit (vgl. [JC10] S. 10 ff)

Eine andere Methode, um zur Gleichung von Cucker und Smale zu gelangen, ist der Weg über *Mean-Field Limits*. In der Mean-Field theory (Molekularfeldtheorie) geht es um Näherungen, die Systeme von miteinander wechselwirkenden Teilchen als Systeme freier Teilchen in einem externen Feld betreffen. Dabei entstehen zwar quantitativ ungenaue Werte, doch können die Ergebnisse qualitativ Hinweise auf Skalenverhalten geben.[mol]

Sei nun

$$f^N(x, v, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \delta(v - v_i(t))$$

die empirische Verteilungsdichte zur Lösung  $(x(t), v(t))$  vom Cucker-Smale Particle Model of Flocking, mit  $\delta$  ist das Dirac delta und  $P(\mathbb{R}^k)$  ist der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße über  $\mathbb{R}^k$ . Wir nehmen an, dass sich alle Partikel in einem fixen kompakten Gebiet  $(x_i(t), v_i(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  für alle  $N$  und  $t \in (0, T)$  befinden.

Diese Annahme ist erfüllt für das Cucker-Smale Modell wenn zum Beispiel die anfängliche Konfiguration erhalten bleibt als eine Approximation eines anfänglichen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $f_0$  mit kompaktem Träger, da für jedes  $t$  das Maß  $f^N(t) := f^N(\cdot, \cdot, t)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß in  $P(\mathbb{R}^{2d})$  mit konstantem Träger ist. Mit dem Prohorov-theorem impliziert das die relative schwach\* Kompaktheit, da eine Teilfolge  $(f^{N_k})_k$  mit  $f : \mathbb{R}^{2d}$  existiert, so dass  $f^{N_k} \rightarrow (k \rightarrow \infty)$  punktweise schwach\* in  $P(\mathbb{R}^{2d})$  konvergiert. Sei nun  $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^{2d})$ , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f^N(t), \phi \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \phi(x_i(t), v_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N \nabla_x \phi(x_i(t), v_i(t)) \cdot v_i(t) + \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(x_i - x_j) [\nabla_v \phi(x_i(t), v_i(t)) \cdot (v_j(t) - v_i(t))] \\ &= \langle f^N(t), \nabla_x \phi \cdot v \rangle - \left( \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(x_i - x_j) [\nabla_v \phi(x_i(t), v_i(t)) \cdot v_i(t)] \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(x_i - x_j) v_j(t) \right] \cdot \nabla_v \phi(x_i(t), v_i(t)) \right) \\ &= \langle f^N(t), \nabla_x \phi \cdot v \rangle - \langle f^N(t), \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(x - x_j) \right] \nabla_v \phi(x, v) \cdot v \rangle \\ &\quad + \langle f^N(t), \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(x - x_j) v_j(t) \right) \cdot \nabla_v \phi(x, v) \rangle \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(x - x_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle H(x - y), \delta(y - x_j) \rangle_x = H * \rho_{f^N}(x, t),$$

wobei

$$\rho_{f^N}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} f^N(x, v, t) dv = \langle 1, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(y - x_j) \delta(v - v_j) \rangle_v;$$

analog ergibt sich

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(x - x_j) v_j(t) = H * m_{f^N}(t, x),$$

wobei

$$m_{f^N}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} v f^N(x, v, t) dv = \langle v, \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(y - x_j) \delta(v - v_j) \rangle_v.$$

Wenn man diese beiden Formeln verbindet, folgt

$$\frac{d}{dt} \langle f^N(t), \phi \rangle = \langle f^N(t), \nabla_x \phi \cdot v + H * m_{f^N} \cdot \nabla_v \phi - H * \rho_{f^N} \nabla_v \phi \cdot v \rangle.$$

Nach Integration nach  $x$  und  $y$  erhält man

$$\left\langle \frac{\partial f^N}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^N - \nabla_v \cdot [\xi(f^N) f^N], \phi \right\rangle = 0,$$

oder als starke Form

$$\frac{\partial f^N}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f^N = \nabla_v \cdot [\xi(f^N) f^N],$$

( $\xi$  wie im C-S Kinetic Model of Flocking). Wenn man nun  $k \rightarrow \infty$  laufen lässt, führt dies zu

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \nabla_v \cdot [\xi(f) f],$$

was genau die gewünschte Gleichung ist.

Es wurde gesagt, dass die kinetischen Modelle einfacher zu modellieren sind, aber dafür nur die Dichte des Schwarms betrachten. Im Folgenden dazu ein Beispiel einer Simulation einmal mit dem Partikelmodell und einmal mit dem kinetischen Modell.

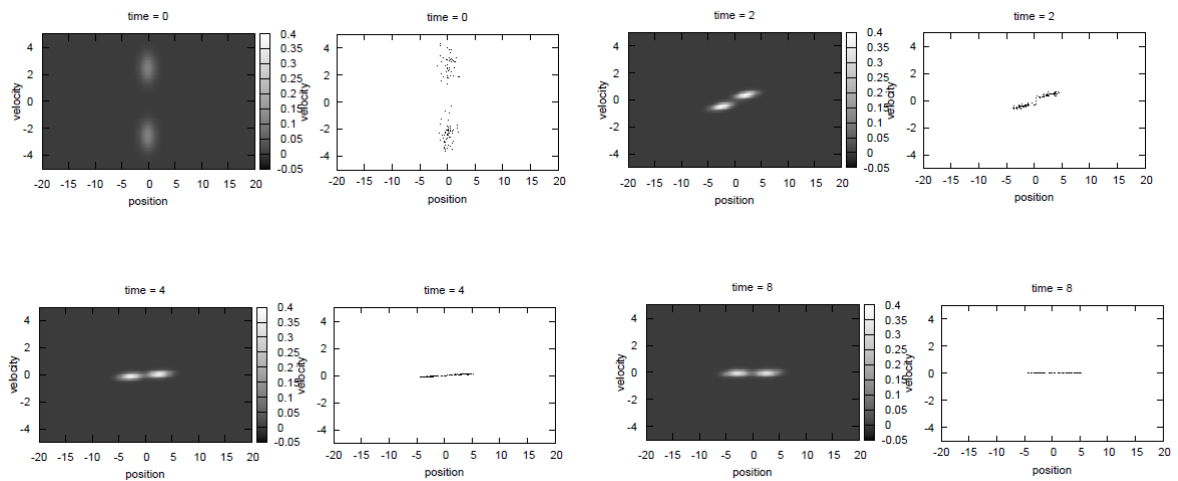


Abbildung 8: ([JC10] S. 28) Hier das Cucker-Smale Particle Model VS Cucker-Smale Kinetic Model für  $\gamma = 0,05 < \frac{1}{2}$

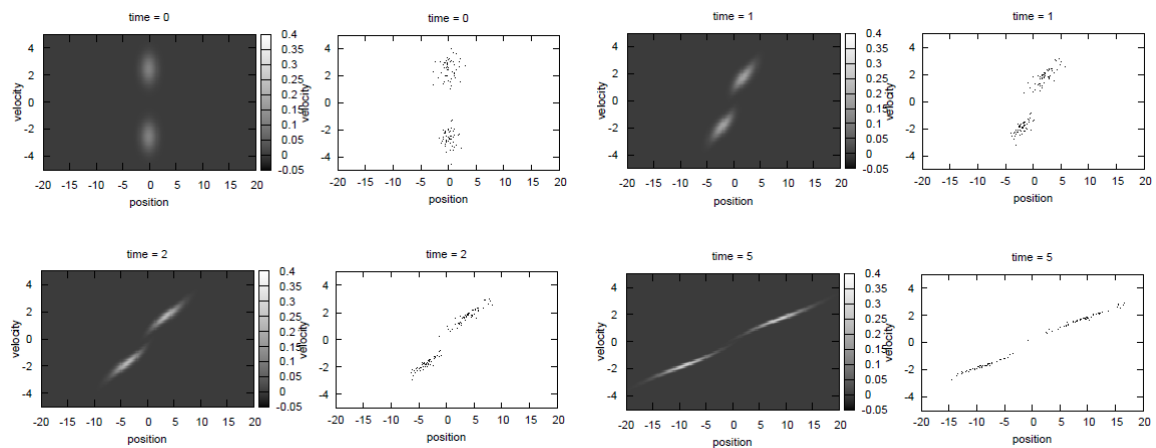


Abbildung 9: ([JC10] S. 29) Hier das Cucker-Smale Particle Model VS Cucker-Smale Kinetic Model für  $\gamma = 0,95 > \frac{1}{2}$

## 1.4 Erweiterte Cucker-Smale-Modelle

Das Cucker-Smale Partikel-Modell und auch dessen kinetische Version bieten eine gute Grundlage zum Studium von Schwarmverhalten. Hier kann man nun ansetzen, um andere Ideen einzubauen. Verzögerte Reaktion, das Auftreten von Anführern oder Störungseinflüsse sind nur einige mögliche Dinge, die interessant zu betrachten wären. Vor allem die Tatsache, dass die Individuen mit einer 360 Grad Sicht behandeln werden, ist biologisch gesehen fragwürdig. Die damit einhergehende Frage lautet: In wie weit beeinflusst wirklich jedes Individuum die anderen? Gibt es Unterschiede? Und wenn ja, wie stellt man diese da?

### 1.4.1 Sichtkegel und spontane Anführer (vgl. [[JC10] S. 20 ff)

Eine mathematische Formulierung der eben gestellten Fragen ist die folgende:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt} v_i &= \frac{1}{N} \sum_{j \in \Sigma_i} a(|x_i - x_j|) (v_j - v_i) \end{cases}$$

Zunächst bedeutet dies nur, dass die Anzahl der zu betrachtenden Individuen, die das gewählte Individuum beeinflussen, an eine Bedingung geknüpft ist, nämlich, dass die Individuen in der Menge  $\Sigma_i$  zu finden sind. Daraus lassen sich aber direkt Überlegungen anstellen. Ist nämlich  $\Sigma_i = \emptyset$  für

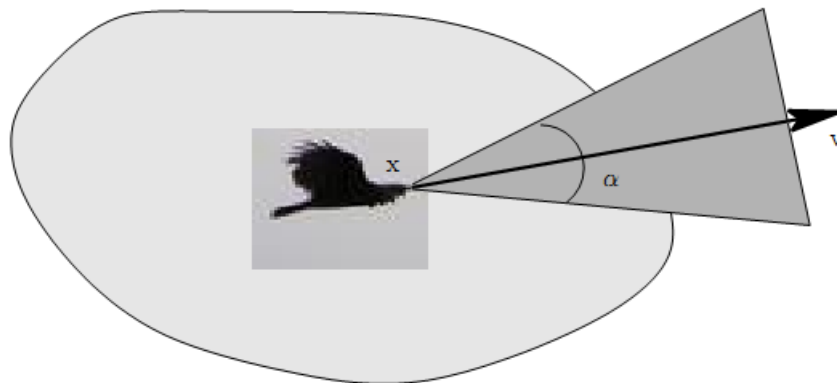


Abbildung 10: ([JC10] S. 20)



Individuum  $i$ , bedeutet dies, dass kein Gruppenmitglied Einfluss auf  $i$  hat, es selbst aber Einfluss auf andere haben könnte und somit zum Beispiel Teile der Gruppe leitet. Demnach wären alle Individuen, für die gilt  $\Sigma_i = \emptyset$ , Anführer der Gruppe. Auf zwei Aspekte soll hierbei hingewiesen werden: Zum einen ist es zwar einfach, sich das Ganze für eine endliche Anzahl an Individuen zu überlegen, aber schwerlich zu beschreiben, was dies für eine Kontinuumsverteilung, wie sie im kinetischen Modell vorkommt, bedeutet. Zum anderen ist es in der Natur eher der Fall, dass es *spontane Anführer*[JC10] gibt. Das bedeutet, dass die Anführer, zum Beispiel in einem Vogelschwarm, ständig und unwillkürlich wechseln, was zu erklären ist, wenn man den Sichtbereich eines Individuums mit einbezieht. Befindet sich ein Individuum am Rand des Schwarms, kann es passieren, dass kein anderes Mitglied in seinem Sichtbereich ist. Dies führt dazu, dass es sich optisch nicht an anderen Tieren orientiert. Es wird also zu einem Anführer, der beeinflusst, ohne selbst beeinflusst zu werden. Diese Phase endet natürlich, sobald ein anderes Mitglied ins Sichtfeld gerät (siehe Abbildung 10). Wenn man diese Überlegung nun in das Cucker-Smale Modell einbaut, also die Kombination von möglichem Anführertum in Verbindung mit einem Sichtkegel, ergibt sich folgendes Modell

#### 1.4.2 Das Cucker-Smale Partikel Modell mit Führungsverhalten: (vgl. [JC10] S. 21)

Für  $\alpha \in [-1, 1]$  definiere

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt} v_i &= \frac{1}{N} \sum_{j \in \Sigma_i(t)} a(|x_i - x_j|)(v_j - v_i), \end{cases}$$

wobei

$$\Sigma_i(t) := \{1 \leq l \leq N : \frac{(x_l - x_i) \cdot v_i}{|x_l - x_i| |v_i|} \geq \alpha\}.$$

Ein Individuum mit Position  $x_i$  orientiert sich also, um seine Geschwindigkeit mit der Kommunikationsrate  $a(|x_i - x_j|)$  zu verändern, nur an den anderen Mitgliedern seiner Gruppe  $x_j$ , die sich im Sichtkegel  $C_i := \{1 \leq l \leq N : \frac{(x_l - x_i) \cdot v_i}{|x_l - x_i| |v_i|} \geq \alpha\}$  befinden. Das heißt, solche Individuen, die sich am Rand des Schwarms aufhalten, haben eine Chance, dass der Sichtkegel leer ist, also  $C_i = \emptyset$ . Das macht sie zu Anführern. Bei diesem Modell kommt es dann zu Dreiecksgebilden, bei denen der Schwarm sich hinter einem Anführer in der Spitze aufreißt. Siehe folgende Grafik

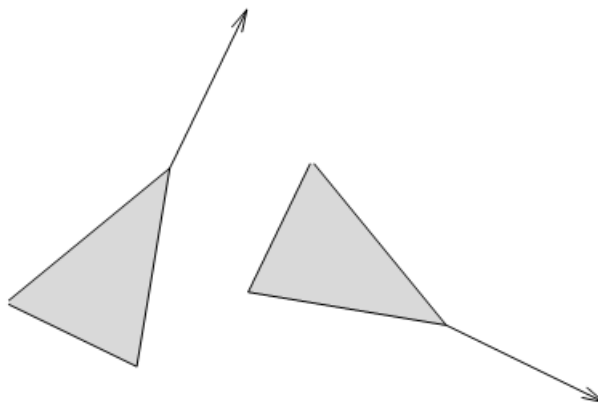


Abbildung 11: ([JC10] S. 21)

Zudem ist meistens auch die Entwicklung zu mehreren dieser Gebilde innerhalb eines Schwarms zu sehen. Der Winkel und die Anzahl der Triangelbildungen hängt dabei von den Anfangsbedingungen und vor allem vom Sichtkegelparameter  $\alpha$  ab. Wendet man nun, ähnlich wie in Kapitel 2.3.2 Mean-Field Limits an, so ergibt sich das folgende kinetische System,

### 1.4.3 Das Cucker-Smale Kinetik Modell mit Führungsverhalten (vgl. [JC10] S. 21)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \lambda \nabla_v \cdot [\xi(f; \alpha) f],$$

wobei

$$\xi(f; \alpha)(x, v, t) = \int_{\substack{(x-x') \cdot v \\ |x-x'| |v|} \geq \alpha} \frac{K}{(\sigma^2 + |x-y|^2)^\beta} \left( \int_{\mathbb{R}^d} (v-w) f(y, w, t) dw \right) dy.$$

## 1.5 Nichtlineare Störungen

Wenn man sich nun Tiere in einem Schwarm vorstellt oder auch einfach sich selbst in einer Gruppe Menschen, dann kommt es vor, dass man nicht alles um sich herum mitbekommt. Manchmal stößt man mit anderen zusammen oder läuft genau gegeneinander, weil man in die andere Richtung gehen wollte wie der andere. Man zieht also die falschen Schlüsse aus dem, was man sieht. Manchmal reagiert man auch einfach nicht schnell genug. Dies führt zu Zusammenstößen, Anhäufungen und so weiter. Das Gleiche kann man sich ebenfalls bei den Tieren vorstellen. Auch wenn die Bewegung im Schwarm sehr intuitiv ist, kommt es doch vor, dass Signale falsch interpretiert werden. Dieses Phänomen soll durch die folgende Erweiterung des Cucker-Smale-Modells dargestellt werden.

### 1.5.1 Das Cucker-Smale Partikel Modell mit Störungen (vgl. [JC10] S. 23)

$$\begin{cases} dx_i &= v_i dt, \\ dv_i &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a(|x_j - x_i|) (v_j - v_i) dt + \sqrt{2 \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^m a(|x_j - x_i|) d\Gamma_i(t)}, \end{cases}$$

wobei  $a$  wieder die Kommunikations-Funktion definiert durch

$$a(r) = \frac{K}{(\sigma^2 + |r|^2)^\gamma}.$$

$\Gamma_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) sind  $N$  unabhängige Wiener-Prozesse mit Werten in  $\mathbb{R}^d$  und  $\sigma \geq 0$  ist eine Konstante, die die Stärke der Störungen beschreibt. (Wiener-Prozess ,beziehungsweise Brownsche Bewegung, bezeichnet einen in der Zeit stetigen, stochastischen Prozess, der normalverteilte, unabhängige Zuwächse hat[wie].)

Die Summe der Entfernungspotentiale des  $i$ -ten Individuums zu allen anderen ist dabei gerade proportional zur Stärke der Störung des Individuums,

$$\frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N a(|x_j - x_i|).$$

Um dieses Mal das Modell zu einem kinetischen Modell zu verändern, es also als mesoskopische Beschreibung der Gruppe zu nutzen, wählt man hier wieder den Weg über die Boltzmann-Gleichungen. Dazu benennen wir wieder die Geschwindigkeit und die Position  $(x, v)$  und  $(y, w)$  nach Interaktion mit  $(x^*, v^*)$  und  $(y^*, w^*)$  und formulieren die Interaktionsregeln wie folgt:

$$v^* = (1 - \eta a(|x - y|)) v + \eta a(|x - y|) w + \sqrt{2\sigma\eta a(|x - y|)} \theta_v$$

$$w^* = \eta a(|x - y|) v + (1 - \eta a(|x - y|)) w + \sqrt{2\sigma\eta a(|x - y|)} \theta_w,$$

wobei  $\eta > 0$  und  $\sigma \geq 0$  Konstanten sind.

$$\theta_v = (\theta_{v,1}, \theta_{v,2}, \dots, \theta_{v,d}) \in \mathbb{R}^d$$

$$\theta_w = (\theta_{w,1}, \theta_{w,2}, \dots, \theta_{w,d}) \in \mathbb{R}^d$$

$\theta_{v,i}, \theta_{w,i}$  ( $1 \leq d \leq d$ ) sind identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und gleicher Varianz. Zudem sei das Supremum der Kommunikationsrate beschränkt

$$\eta \sup_x a(|x|) < \frac{1}{2}.$$

Später ist diese Annahme nicht mehr wichtig, da dann im Fall der *grazing limits*[JC10] die Funktion  $a$  mit einem sehr kleinen Parameter  $\epsilon > 0$  skaliert wird. *Grazing*, oder auch *grazing collision* sind solche Kollisionen, bei denen sich zwei Partikel nur streifen, das heißt sehr schwach beeinflussen. *Grazing limit* ist dann der Grenzwert, bei dem die Interaktionen quasi nur noch auf diese Streifenden beschränkt sind[Pul12]. Für uns bedeutet dies, dass die Interaktion nur schwach ist, deshalb die Skalierung mit  $\epsilon$ . Wie in 2.3.1 beschreibt

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f),$$

$$Q(f, f)(x, v) = \delta \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{J(|x-y|)} f(x, v_*) f(y, w_*) - f(x, v) f(y, w) \right) dw dy \right]$$

die Entwicklung der Dichte als kinetisches System durch die Integral-Differentialgleichung vom Boltzmanntyp, wobei es sich bei  $(v_*, w_*)$  wieder um die Vorinteraktionsgeschwindigkeiten der Individuen handelt, aus denen das Paar  $(v, w)$  resultiert und

$$J(|x-y|) = (1 - 2\eta a(|x-y|))^d$$

ist die Jakobimatrix der Transformation von  $(v, w)$  nach  $(v^*, w^*)$ . Wie in 2.3.1, geht man auf die schwache Formulierung des stochastischen Problems über und betrachtet alle glatten Funktionen  $\phi$  mit kompaktem Träger. Dann gilt für die schwache Lösung von  $f$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} v \cdot \nabla_x \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv \\ &+ \delta \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}^{4d}} (\phi(x, v^*) - \phi(x, v)) f(x, v, t) f(y, v, t) dx dy dv dw \right] \end{aligned}$$

für alle  $t > 0$  und

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(x, v) f_0(x, v) dx dv.$$

Um nun gerade das *grazing limit* zu erreichen, wird, wie bereits erwähnt,  $a$  wie folgt skaliert  $a = \epsilon a_0$ , wobei  $\epsilon > 0$  sehr klein ist. Man nehme nun an, dass  $f = f(x, v, t)$  genauer  $f^{\delta, \epsilon}$ , also die mit  $\delta$  und  $\epsilon$  skalierte Funktion, der Boltzmann-Gleichung genügt. Betrachtet man nun die schwache Formulierung und führt eine Taylorentwicklung durch, erreicht man

$$\begin{aligned} \phi(x, v^*) - \phi(x, v) &= \nabla_v (\phi(x, v)) \cdot (v^* - v) + \frac{1}{2} \sum_{|\beta|=2} \partial_v^\beta \phi(x, v) (v^* - v)^\beta \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{|\beta|=3} \partial_v^\beta \phi(x, \tilde{v}) (v^* - v)^\beta, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{v}$  ein Vektor zwischen  $v^*$  und  $v$  ist. Da

$$v^* - v = \epsilon \eta a_0(|x-y|)(w-v) + \sqrt{2\sigma\epsilon\eta a_0(|x-y|)} \theta_v,$$

gilt für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[\phi(x, v^*) - \phi(x, v)] = \epsilon \nabla_v \phi(x, v) \cdot \eta a_0(|x-y|)(w-v) + \epsilon \Delta_v \phi(x, v) \cdot \sigma \eta a_0(|x-y|) + O(\epsilon^2).$$

Diese Gleichungen nun eingesetzt ergeben,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} v \cdot \nabla_x \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv \\ &+ \delta \epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} \nabla_v \phi(x, v) \cdot (w-v) \eta a_0(|x-y|) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dy dv dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta\epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} \sigma \Delta_v \phi(x, v) \eta a_0(|x - y|) f(y, w, t) dx dy dv dw \\
& + \delta\epsilon O(\epsilon).
\end{aligned}$$

Wenn man jetzt das "grazing limit", betrachtet, also  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta\epsilon \rightarrow 1$  laufen lässt, ergibt sich für die Grenzfunktion

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} v \cdot \nabla_x \phi(x, v) f(x, v, t) dx dv \\
& + \delta\epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} \nabla_v \phi(x, v) \cdot (w - v) \eta a_0(|x - y|) f(x, v, t) f(y, w, t) dx dy dv dw \\
& + \delta\epsilon \int_{\mathbb{R}^{4d}} \sigma \Delta_v \phi(x, v) \eta a_0(|x - y|) f(y, w, t) dx dy dv dw.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $f$  formal der folgenden Gleichung genügt:

**1.5.2 Das Cucker-Smale Kinetik Modell mit nichtlinear abhängigen Störungen: (vgl. [JC10] S. 25)**

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \eta \nabla_v \cdot (\xi(f) f) + \eta \sigma (a_0 * \rho) \Delta_v f.$$

## 2 Cutoff Funktionen (vgl. [Agu11])

Die bisher erreichten Resultate sind zwar mathematisch schön anzusehen und liefern einige interessante Verhaltensweisen der Gruppe, die auch in der Natur sichtbar sind, doch aus biologischer Sicht ist dies doch wenig zufriedenstellend. Alleine schon durch einfache Beobachtungen eines Schwarms lässt sich erkennen, dass nicht alle Individuen dieselbe Geschwindigkeit erreichen und halten oder bestimmte Abstände fixiert werden. Vielmehr sind Phasen zu erkennen, bei denen der Schwarm wogt, sich zusammenzieht und wieder weiter auseinandergeht oder auch plötzlich sehr hektisch wird. Es fehlen eben andere Einflüsse wie bewegungsbeeinträchtigende Effekte (Wind bei Vögeln, Strömung bei Fischen), Einfall von Fressfeinden oder auch einfach Reaktionsgeschwindigkeit einzelner. Unser Grundmodell (Cucker-Smale) hat die eher unrealistische Eigenschaft, dass es den Impuls erhält. Dies kommt von der Symmetrie des Interaktionsterms [Agu11]  $H$ , also  $|v_i - v_j| = |v_j - v_i|$ . Das dies nicht stimmen kann, erkennt man sehr schnell, wenn man sich zwei Vögel vorstellt, wobei der Eine hinter dem Anderen herfliegt. Dabei beeinflusst zwar möglicherweise der vorneweg Fliegende seinen Hintermann, umgekehrt ist das aber eher fraglich und wenn überhaupt, schon gar nicht mit der selben Intensität, also  $H_{ij} \neq H_{ji}$ .

### 2.1 Abgeändertes C-S Modell (vgl. [Agu11] S. 3 ff)

Um nun ein anderes Modell zu entwickeln, werden zuerst einige Annahmen formuliert:

1. Individuen werden versuchen, von sehr nahen Nachbarn Abstand zu gewinnen (Kurzstrecken-Abstoßung). Das folgende Modell wird also eine solche Kraft enthalten, die allerdings unabhängig von der relativen Geschwindigkeit sein wird. Zudem wird dieser Term erlauben, dass Individuen einander "passieren" [[Agu11] S. 3] dürfen, beziehungsweise sehr nah beieinander sein können.
2. Langsame Individuen sollen sich, wie im Cucker-Smale-Modell, den Individuen in unmittelbarer Nachbarschaft anpassen.
3. Schnelle Individuen hingegen werden nur auf Mitglieder der Gruppe reagieren, die sich in einem Sichtkegel vor ihnen befinden.
4. Ebenfalls werden schnelle Individuen, die sich sehr nah am Rand des Schwarms befinden, ihre Richtung ändern, um im Schwarm zu bleiben. Dieser Effekt soll flächenbezogen nur am Rand des Schwarms auftreten und ist wichtig, um ihn zusammen zu halten.

Für eine Gruppe aus  $N$  Individuen mit gleicher Masse  $m$  ergibt sich folgendes Modell:

$$\frac{d}{dt}x_i = v_i$$
$$m \frac{d}{dt}v_i = R_i + A_i + B_i + (\alpha - \beta|v_i|^2)v_i$$

Dabei beschreiben  $R_i$  und  $A_i$  die Abstoßungs-(repulsive) beziehungsweise Anziehungs-(attractive) Kräfte zwischen den Individuen und  $B_i$  den Randeffect. Am Ende steht der schon bekannte Selbstantriebsterm.

### 2.1.1 Cutoff Funktion (vgl. [Agu11] S. 4 ff)

Um die Kräfte nun den Annahmen gemäß zu modellieren benutzen wir stetige *cutoff* Funktionen, um die Reichweite der einzelnen Kräfte einzugrenzen. Sei  $S_0 = S_0(r)$ , dann gilt zum Beispiel für eine cutoff Funktion  $S_0(r) = 1$  für  $r \leq d_0$ ,  $S_0(r) = 0$  für  $r > d_0 + \epsilon_0$  und  $S_0$  fällt dazwischen stetig ab. Ein Beispiel für eine mögliche cutoff Funktion ist in folgender Grafik dargestellt:

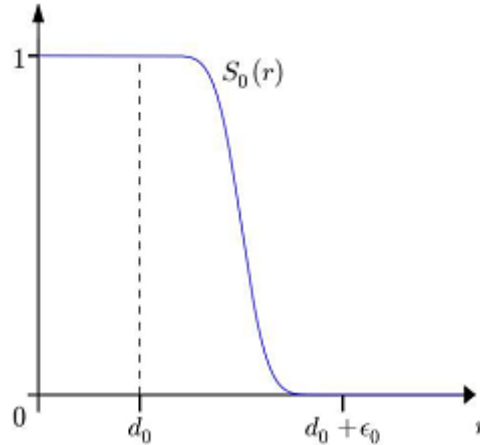


Abbildung 12: ([Agu11] S. 4)

### 2.1.2 Abstoßung

Der Term der Abstoßungskraft sieht folgendermaßen aus:

$$R_i = \frac{\rho_1}{N} \sum_{j=1}^N S_0(|x_i - x_j|) \frac{x_i - x_j}{(1 + |x_i - x_j|^2)^{\beta_1}},$$

wobei  $\rho$  ein großer positiver Parameter ist und  $\beta_1 > 0$ . Dies ist also eine abstoßende Kraft zwischen zwei Individuen, die einen geringeren Abstand als  $d_0$  zueinander haben. Es ist zu bemerken, dass dieser Term nicht größer wird, je näher sich die beiden Individuen kommen. Er verschwindet sogar für  $|v_i - v_j|$  gegen 0. Dies ist zum Einen einem stetigen Kräfteterm geschuldet, zum Anderen der Tatsache, dass Individuen ohnehin alles versuchen werden, um Kollisionen zu vermeiden. Ihre Möglichkeiten dafür sind natürlich nach oben beschränkt. Daraus folgt, dass es eventuell zu einzelnen Kollisionen kommen kann, die hier jedoch ignoriert werden. Dafür wurde die Annahme eingeführt, dass Individuen einander *passieren* dürfen. Das dient nicht der Realitätsnähe, sondern ist der Tatsache geschuldet, das Modell nicht zu verkomplizieren. Die Kraft jedoch ganz wegzulassen, da ja ohnehin keine Kollisionen vermieden oder berücksichtigt werden, ist dann jedoch eine zu große Vereinfachung des Modells.

### 2.1.3 Anziehung

Der Anziehungsterm sieht dann folgendermaßen aus:

$$A_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 - S_0)(|x_i - x_j|) \tilde{w}(x_i - x_j, v_i)(v_j - v_i),$$

wobei, um  $\tilde{w}$  zu beschreiben noch Folgendes zu sagen ist:

Sei  $S_1(v)$  eine Geschwindigkeits- cutoff nach dem Muster von  $S_0$  das man demnach Positions-cutoff nennen könnte,  $S_1(|v|) = 1$  für  $|v| \leq d_1$  und  $S_1(|v|) = 0$  für  $|v| > d_1 + \epsilon_1$ . Darüber hinaus ist nun der Sicht-cutoff [Agu11] S. 5], bei hohen Geschwindigkeiten folgendermaßen beschrieben: Sei dafür ein Individuum (I1) an Position  $x$  und bewege sich mit Geschwindigkeit  $v$ , wobei  $|v| > d_1 + \epsilon_1$

ist. I1 reagiert nur dann auf ein anders Individuum (I2) mit Position  $y$ , wenn I2 sich in einem Sichtkegel, definiert durch  $\cos\angle(y-x, v) > \delta_1$ , befindet.  $\delta$  ist hierbei vorgegeben, auch wenn es möglicherweise von  $|v|$  abhängen kann. Zusätzlich gibt es noch einen peripheren Sichtbereich, der beschrieben ist durch  $\cos\angle(y-x, v) \in (\delta_1, \delta_2)$ , wobei  $\delta_2 < \delta_1$ . Setze nun  $\kappa = \cos\angle(y-x, v)$ , dann ist der cutoff  $S_2$  im Intervall  $[-1, 1]$  definiert durch  $S_2(\kappa) = 0$  für  $\kappa \leq \delta_2$  und  $S_2(\kappa) = 1$  für  $\kappa > \delta_1$ . Auf dem Intervall  $[\delta_2, \delta_1]$  ist die Funktion stetig wachsend, zum Beispiel  $S_2 = 1 - S_0$ . Nun kann man  $\tilde{w}$  definieren:

$$\tilde{w}(x-y, v) = \frac{\gamma}{(q + |x-y|^2)^\sigma} (S_1(|v|) + (1 - S_1(|v|))S_2(\frac{(y-x) \cdot v}{|y-x||v|}))$$

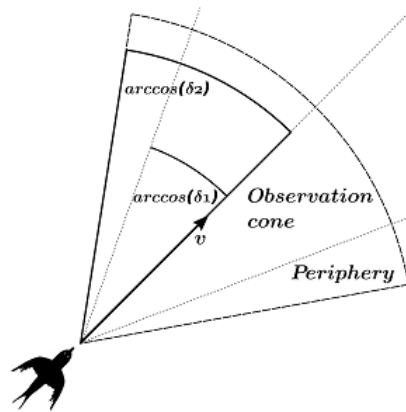


Abbildung 13: ([Agu11] S. 6)

#### 2.1.4 Randkraft

Bleibt noch die letzte Kraft zu beschreiben, die Randkraft. Dabei kommt natürlich schnell die Frage auf: Ist es sinnvoll eine Kraft einzufügen, die den Schwarm daran hindert, sich aufzuteilen? In der Natur kann es durchaus passieren, dass sich Schwärme aufteilen, ob durch äußere Einflüsse oder Ähnliches[Agu11]. Im ursprünglichen Cucker-Smale-Modell ist, durch die Symmetrie im Anziehungsterm, die Entwicklung des Systems von Anfang an eindeutig, also ob das System auseinander geht oder sich zu einer festen Form entwickelt. In diesem Modell ist dies ja gerade nicht der Fall. Wir haben eben keine Impulserhaltung und auch Aufspaltungen des Schwarms sind möglich. Vor allem, wenn man sich ein sehr schnelles Individuum am Rand des Schwarms vorstellt, kann es leicht passieren, dass sich kein anderes Individuum mehr im Sichtkegel befindet, was zur Folge hat, dass es sich immer weiter in eine Richtung, weg vom Schwarm, bewegt. Falls dies in der Realität vorkommt und nicht durch besondere Einflüsse hervorgerufen wurde, tritt nun natürlich wieder der Wunsch zum Vorschein, ein Teil des Schwarms zu sein, der mit wachsender Zeit, in der das Individuum allein ist, ebenfalls wachsen sollte. Für das Modell hat das eine Art Umkehrkraft zur Folge, die stetig zunimmt. Für den dreidimensionalen Raum mit integrierter Gravitation als Richtwert mit Richtung  $-k = \langle 0, 0, -1 \rangle$  ergibt sich

$$B_i = CS_3(\rho_i)(v_i \times k),$$

mit  $\rho = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{1+|x_i-x_j|^2}$ ,  $C$  ein Parameter und einer stetigen cutoff-Funktion  $S_3$ , Für die gilt, analog zu  $S_1$  und  $S_2$ ,  $S_3(\rho_i) = 1$  für  $\rho_i \leq d_3$  und  $S_3(\rho_i) = 0$  für  $\rho_i > d_3 + \epsilon_3$ .  $\rho_i$  ist nun der Wert, der das Maß an Einsamkeit beschreibt, der das Individuum betrifft. Wenn  $\rho_i$  abnimmt, wird das Individuum immer weiter von seiner Gruppe getrennt und dann *nach dem Schwarm suchen*[[Agu11] S.6]. Das soll heißen, dass das Individuum in dem Modell umdreht. Es ist zu erwähnen, dass dieser Mechanismus zwar immer aktiv ist, aber im Vergleich zu den anderen Kräften sehr klein, wenn  $\rho$  groß ist. Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, eine Umkehrkurve zu vollführen:

Da wir im dreidimensionalen Raum sind sogar sehr viele. In diesem Modell ist die Drehrichtung der Uhrzeigersinn. Dabei wird um die vertikale Achse gedreht, die durch die Gravitation gegeben ist. Es macht hierbei keinen Unterschied, wie herum nun gedreht wird. Es könnte auch noch eine Wahrscheinlichkeit für mit und gegen den Uhrzeigersinn eingeführt werden, aber das würde jetzt nicht viel ändern und wird deshalb weggelassen. Man könnte zudem noch einführen, dass Individuen auch akustische und nicht nur optische Signale wahrnehmen können, wenn sie am Rande oder außerhalb des Schwarms sind, oder eine Kraft, die, ähnlich zu dieser, sie anleitet, bei wachsendem Abstand zu ihrem Schlafplatz oder zu einer Futterstelle zurück zu kehren. Doch dies würde jetzt zu weit führen.

## 2.2 Warum stetige Cutoff Funktionen? (vgl. [Agu11] S. 7 ff)

Im Folgenden soll diskutiert werden, was passiert, wenn man statt stetiger Cutoff Funktionen solche nimmt, die eine Sprungstelle besitzen Dazu hier ein Beispiel:

Betrachte dazu eine sehr einfache Form des Modells, in dem die Reibungs- und Abstoßungskraft ganz weggelassen werden. Für den Anziehungsterm wird der kleine Geschwindigkeits-Cutoff weggelassen und nur ein scharfer, sektorialer Cutoff betrachtet. Nach den Änderungen sieht der Anziehungsterm dann wie folgt aus:

$$\tilde{A}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{w}(x_i - x_j, v_i)(v_j - v_i)$$

$\tilde{w}$  ist dabei ebenfalls etwas vereinfacht. Angenommen, das betrachtete Individuum(I1) mit Position  $x$  und Geschwindigkeit  $v \neq 0$  reagiert nur mit einem Individuum(I2) mit Position  $y$ , wenn I2 sich innerhalb des Sichtkegels von I1 befindet. Dieser ist definiert durch  $\cos\angle(y - x, v) \geq \delta_1$ , wobei  $\delta_1$  gegeben ist aber wieder von  $|v|$  anhängen kann.. Wenn nun  $\cos\angle(y - x, v) < \delta_1$  ist, befindet sich I2 außerhalb des Sichtfeldes und wird von I1 nicht gesehen. Sei nun  $\kappa = \cos\angle(y - x, v)$ , dann ist der scharfe Cutoff  $S_4$  (die unstete Version von  $S_2$ ) auf  $[-1,1]$  definiert durch  $S_4(\kappa) = 0$  für  $\kappa \leq \delta_1$  und  $S_4(\kappa) = 1$  für  $\kappa > \delta_1$ . Dann sieht  $\tilde{w}$  wie folgt aus:

$$\tilde{w}(x - y, v) = \frac{\gamma}{(1 + |x - y|^2)^\sigma} (S_4(\frac{(y - x) \cdot v}{|y - x||v|}))$$

Dies führt zu einigen Unstetigkeiten im Kraftterm. Zum Einen ist die sektoriale Abhängigkeit undefiniert für  $|v| = 0$ , wobei dieser Fall ohnehin das Maß Null besitzt. Eine weitere Unstetigkeit befindet sich im Randbereich des Sichtkegels. Wenn das Individuum sich bewegt, kann es sein, dass andere Individuen immer wieder kurz in das Sichtfeld kommen gleich wieder verschwinden. Dabei würde der einfachere Anziehungsterm hin und her springen, was durch die periphere Sicht im Ursprungsmodell verhindert wird. Für die Umkehrkraft nehmen wir nun einfach

$$\tilde{B} = C_{\chi_{\{|\tilde{A}_i| < \epsilon\}}} \cdot (v_i \times k).$$

Daraus resultiert die Beschleunigungsgleichung

$$m \frac{d}{dt} v_i = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i.$$

Wie schon erwähnt ist der "hin und her" Charakter des Umkehrterms unrealistisch und problematisch. Dazu das folgende Beispiel:

$$\frac{d}{dt}(t) = 1 - w_{\chi_{x(t) > 1}}, x(0) = 0$$

Demnach ist  $x(t) = t$  wenn  $t < 1$  und  $x(1) = 1$  und  $\frac{d}{dt}x(1) = 1$ . Jedoch kann  $x(t)$  1 nicht wirklich überschreiten, denn dann gilt  $\frac{d}{dt}x(t) = -1$ , was bedeutet, dass  $x$  wieder kleiner würde und so weiter. Demnach sieht  $x \equiv 1$  wie eine stabile stationäre Lösung aus. Doch löst sie die Gleichung nicht. Dies würde durch eine stetige charakteristische Funktion geändert.



### 2.3 Kinetisches Modell (vgl. [Agu11] S. 9)

Um nun unser Partikel-Modell zu einem kinetischen Modell zu entwickeln, benutzen wir wieder  $f = f(x, v, t)$  als Maßwertfunktion, für die gilt  $d\mu_t(x, t) = f(x, v, t)dvdx$ . Dies nutzen wir nun, da  $t \rightarrow \mu_t$  eine natürliche Erweiterung des endlichen Systems, zum Modell mit unendlicher Anzahl von Individuen ist. Das führt zu folgenden Gleichungen:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = -\operatorname{div}_v([\xi(f) + (\alpha - \beta|v|^2)f])$$

mit

$$\xi(f) = \xi_R(f) + \xi_A(f) + \xi_B(f),$$

dabei sind

$$\xi_R(f)(t, x) = \rho_1 \int \int \frac{x - y}{(1 + |x - y|^2)^{\beta_1}} S_0(|x - y|) f(y, w, t) dw dy,$$

$$\xi(f)_A(t, x, v) = \int \int \tilde{w}(x - y, v)(w - v)(1 - S_0(|x - y|)) f(y, w, t) dw dy,$$

und

$$\xi_B(f)(t, x, v) = C S_3(\tilde{\rho}(x, t))(c \times k),$$

mit

$$\tilde{\rho}(x, t) = \int \int \frac{f(y, w, t)}{1 + |x - y|^2} dw dy.$$

### 3 Selbstorganisierendes System und Active Sets

[vgl. [SM11]] Auch in diesem Kapitel kommen wir zu Beginn wieder auf das Cucker-Smale-Modell zu sprechen. In der Grundform modelliert es das Verhalten einer begrenzten Anzahl  $N$  von Individuen und wird durch den Vorfaktor  $\frac{1}{N}$  normalisiert. Dabei ist zu bemerken, dass das Modell alle Einflüsse das Individuum betreffend betrachtet, auch wenn es nur einige wenige Individuen gibt, die einen wirklich großen Einfluss haben. Dazu folgendes Beispiel:

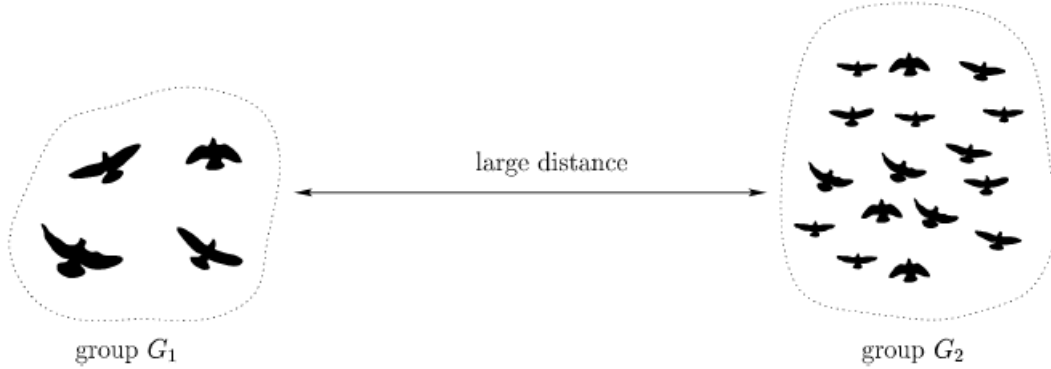


Abbildung 14: [SM11]S. 5

Auf der einen Seite ist eine kleine Gruppe  $G_1$  von  $N_1$  Individuen, auf der anderen Seite, in großer Entfernung, eine große Gruppe  $G_2$  mit  $N_2$  Mitgliedern. Dabei ist  $N_1 \ll N_2$ . Zudem gilt für die Interaktion bei nur genügend großer Entfernung

$$\phi_{ij} \approx 0 \text{ wenn } i \in G_1 \text{ und } j \in G_2$$

Im Cucker-Smale Modell gilt nun für jedes Mitglied aus  $G_1$

$$\frac{dv_i}{dt} \approx \frac{\alpha}{N_1 + N_2} \sum_{1 \leq j \leq N_1} \phi_{ij}(v_j - v_i), \quad i \in G_1$$

Das heißt, obwohl nur in  $G_1$  mögliche Partner für die Orientierung vorhanden sind, wird über die gesamte Anzahl normalisiert. Da aber  $N_1 + N_2 \gg N_1$ , also die Anzahl insgesamt viel größer ist, als die wenigen Individuen in  $G_1$ , resultiert für die Beschleunigung  $\frac{dv_i}{dt} \approx 0$ . Auf Grund einer Gruppe von weit entfernten Individuen stagniert also die erste Gruppe.

#### 3.0.1 Modell im nichthomogenen Phasenraum (vgl. [SM11] S. 5)

Sei  $v_i$  die Geschwindigkeit und  $x_i$  die Position des  $i$ -ten Individuums. Dann wird die Bewegung der  $N$  Individuen wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt}v_i &= \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^N \phi_{ik}} \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(v_j - v_i), \quad \phi_{ij} = \phi(|v_j - v_i|), \end{aligned}$$

dabei ist  $\alpha$  ein positiver Parameter und  $\phi(\cdot)$  die Interaktionsfunktion. Die Besonderheit liegt nun darin, dass der Einfluss, den Individuum  $j$  auf Individuum  $i$  hat, nicht einfach mit der Anzahl der Individuen, sondern mit dem Gesamteinfluss  $\sum_{k=1}^N \phi_{ik}$  bewertet wird. Falls nun alle Mitglieder einer Gruppe auf einem Haufen sind, die Abstände also sich nur wenig unterscheiden und somit die Interaktion untereinander sehr ähnlich ist, zum Beispiel  $\phi_{ij} \approx \phi_0$ , so ist das Ergebnis sehr nah am Cucker-Smale Modell und dessen Dynamik.

$$\frac{d}{dt}v_i = \frac{\alpha}{N\phi_0} \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(v_j - v_i)$$

Ein Unterschied bleibt aber: der Ereignisraum des veränderten Modells muss nicht homogen sein. Nichthomogene Situationen können oft sogar besser dargestellt werden. Als Beispiel dient hier die Situation vom Beginn mit den zwei unterschiedlichen Gruppen. Das Verhalten von einem Individuum in  $G_1$  wird nun auch gut approximiert, wenn man nur die anderen Mitglieder aus  $G_1$  betrachtet.

$$\frac{d}{dt}v_1 \approx \frac{\alpha}{N_1\phi_0} \sum_{1 \leq j \leq N_1} \phi_{ij}(v_j - v_i)$$

Dabei ist  $\phi_0$  die Interaktion innerhalb von  $G_1$  wobei angenommen wird, dass  $\phi_{ij} \approx \phi_0$  für  $i, j \in G_1$ . Die Interaktion mit Mitgliedern von  $G_2$  ist vernachlässigbar klein, also  $\sum_k \phi_{ik} \approx N_1\phi_0$ . Diese Herangehensweise führt dazu, dass die Symmetrie des Cucker-Smale-Modells verloren geht. Eine andere Art das veränderte Modell zu schreiben ist:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt}v_i &= \alpha \sum_{j=1}^N a_{ij}(v_j - v_i), \end{aligned}$$

wobei für  $a_{ij}$  gerade gilt

$$a_{ij} = \frac{\phi(|x_j - x_i|)}{\sum_{k=1}^N \phi(|x_k - x_i|)}$$

und hier die Asymmetrie zu finden ist, da  $a_{ij} \neq a_{ji}$  ist.

### 3.1 Active Sets

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, unter welchen Bedingungen das eben aufgestellte Modell auch wirklich zu einer Schwarmbildung und stabilen Grenzwerten führt. Es geht also um die Frage, ob es irgendwann stabile Geschwindigkeiten und feste Abstände zwischen den Individuen gibt. Dazu wird eine etwas allgemeinere Form von dynamischen Systemen betrachtet[[SM11] S. 7]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt}v_i &= \alpha \sum_{j \neq i}^N a_{ij}(v_j - v_i), \quad a_{ij} \geq 0, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  eine positive Konstante ist und  $a_{ij}$  den paarweisen Einfluss von Individuum  $j$  auf die Anpassung von Individuum  $i$  mit möglichem Einfluss der Zustandsvariablen  $\{x_k, v_k\}_k$  beschreibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man zudem annehmen (sonst skaliert man um), dass

$$\sum_{j \neq i} a_{ij} \leq 1.$$

Wenn man nun

$$\begin{aligned} a_{ii} &:= 1 - \sum_{j \neq i} a_{ij} \\ \bar{v}_i &:= \sum_{j=1}^N a_{ij}v_j, \quad \sum_j a_{ij} = 1 \end{aligned}$$

annimmt, kann man das System umschreiben zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt}v_i &= \alpha(\bar{v}_i - v_i). \end{aligned}$$

Hierbei ist keine Symmetrie gefordert und somit  $a_{ij} \neq a_{ji}$  erlaubt. Damit beinhaltet das etwas allgemeinere System unser verändertes Modell vom Anfang mit den asymmetrischen Koeffizienten

$$a_{ij} = \frac{\phi_{ij}}{\sum_k \phi_{ik}}.$$

### 3.1.1 Definition 1 (vgl. [SM11] S. 3)

Sei  $\{x_i(t), v_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$  ein gegebenes Partikelsystem und seien  $d_X(t)$  und  $d_V(t)$  die Durchmesser für die Position und Geschwindigkeit im gesamten Ereignisraum wie folgt definiert:

$$d_X(t) = \max_{i,j} |x_j(t) - x_i(t)|,$$

$$d_V(t) = \max_{i,j} |v_j(t) - v_i(t)|.$$

Man sagt, das System  $\{x_i(t), v_i(t)\}_{i=1, \dots, N}$  konvergiert zu einem Schwarm, wenn gilt:

$$\sup_{t \geq 0} < + \inf \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d_V(t) = 0.$$

Um dieses Grenzwertverhalten zu testen, werden nun die *Active Sets* verwendet. Dazu das folgende Lemma:

### 3.1.2 Lemma 1 (vgl. [SM11] S. 7)

Sei  $S$  eine antisymmetrische Matrix,  $S_{ij} = -S_{ji}$  mit maximalen Einträgen  $|S_{ij}| \leq M$ , seien  $u$  und  $w \in \mathbb{R}^N$  zwei gegebene reelle Vektoren mit positiven Einträgen  $u_i, w_i \geq 0$  und  $\bar{U} = \sum_i u_i, \bar{W} = \sum_i w_i$  deren aufsummierte Einträge. Wähle ein fixes  $\theta > 0$  und sei  $\lambda(\theta)$  die Zahl der aktiven Einträge auf  $u$  und  $w$  zur Grenze  $\theta$  gemäß

$$\lambda(\theta) = |\Lambda(\theta)|, \quad \Lambda(\theta) := \{j | u_j \geq \theta \bar{U} \quad \text{und} \quad w_j \geq \theta \bar{W}\}.$$

Dann gilt für jedes  $\theta > 0$

$$|\langle Su, w \rangle| \leq M \bar{U} \bar{W} (1 - \lambda^2(\theta) \theta^2).$$

Beweis:

Da  $S$  antisymmetrisch ist finden wir eine Matrix, so dass

$$\langle Su, w \rangle = \sum_{i,j} S_{ij} u_i w_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} S_{ij} (u_i w_j - u_j w_i).$$

Da die Einträge von  $S$  nach oben beschränkt sind, kann man  $S_{i,j}$  vor die Summe ziehen. Im Betrag folgt die Ungleichung

$$|\langle Su, w \rangle| \leq \frac{M}{2} \sum_{i,j} |u_i w_j - u_j w_i|.$$

Da man  $|a - b| \equiv a + b - 2 \min(a, b)$  mit  $a, b \geq 0$  schreiben kann, folgt

$$|\langle Su, w \rangle| \leq \frac{M}{2} \sum_{i,j} |u_i w_j + u_j w_i - 2 \min\{u_i w_j, u_j w_i\}|.$$

$$M(\bar{U} \bar{W} - \sum_{i,j} \min\{u_i w_j, u_j w_i\}).$$

Nehme man nun an, dass mindestens  $\lambda(\theta)$  aktive Einträge zur Grenze  $\theta$  existieren, die die Ungleichungen erfüllen,

$$k \in \Lambda(\theta) : \quad u_k \geq \theta \bar{U} \quad \text{und} \quad w_k \geq \theta \bar{W}$$

und beschränke die Summe aus der vorherigen Gleichung auf diese Einträge, folgt

$$|\langle Su, w \rangle| \leq M(\bar{U} \bar{W} - \sum_{-i, j \in \Lambda(\theta)} \min\{u_i w_j, u_j w_i\}) \leq M(\bar{U} \bar{W} - \lambda^2(\theta) \cdot \theta \bar{U} \cdot \theta \bar{W}).$$

□

Dieses Konzept der *Active Sets* beschreibt die Nachbarschaft eines Individuums über eine so genannte Einflussmatrix anstatt den Abstand zwischen den Individuen zu betrachten. Folgende Definition gilt auch für allgemeine Matrizen und führt diesen Gedanken weiter.

### 3.1.3 Definition 2 (Active Sets) ([vgl. [SM11] S. 8])

Sei  $\{a_{ij}\}$  eine normalisierte Einflussmatrix,  $a_{ij} > 0$ ,  $\sum_j a_{ij} = 1$ . Sei  $\theta > 0$  fest. Ein active Set  $\Lambda_p(\theta)$ , ist die Menge der Einträge, die in Zeile  $p$  größer als  $\theta$  sind, also

$$\Lambda_p(\theta) := \{j | a_{pj} \geq \theta\}.$$

Das globale active Set  $\Lambda(\theta)$  ist der Durchschnitt aller active Sets zur Grenze  $\theta$

$$\Lambda(\theta) = \bigcap_p \Lambda_p(\theta).$$

Das bedeutet, ein Active Set definiert eine Art Nachbarschaft für das Individuum  $p$ . Für mehr als ein Individuum gilt:

$$\Lambda_{pq}(\theta) := \Lambda_p(\theta) \cap \Lambda_q(\theta).$$

$\Lambda_{pq}$  beschreibt dann die Menge aller Individuen, deren Einfluss auf  $p$  und  $q$  größer als  $\theta$  ist.

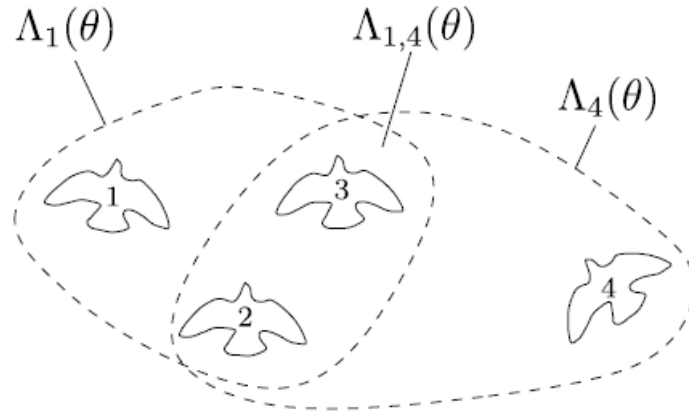


Abbildung 15: ([SM11] S.9) Hier für die Active Sets  $\Lambda_1(\theta) = \{1, 2, 3\}$  und  $\Lambda_4(\theta) = \{2, 3, 4\}$  mit dem paarweisen Active Set  $\Lambda_{14} = \Lambda_1(\theta) \cap \Lambda_4(\theta) = \{2, 3\}$

Wie in der Definition erwähnt, ist die Anzahl der Einträge in einem active Set  $\Lambda_X(\theta)$  beschrieben durch  $\lambda_X(\theta)$ , also zum Beispiel  $\lambda_{14}(\theta) = |\Lambda_{14}(\theta)| = 2$ . Nun ist diese Zahl für beliebige  $\theta$  aber schwer zu ermitteln. Man muss dafür die Paare zählen, für die gilt:

j beeinflusst i um mehr als  $\theta$ .

Ein Unterscheid besteht dann, wenn  $\theta$  gerade der minimale Eintrag der Matrix, also  $\theta = \min_{ij} a_{ij}$  ist. Dann beinhaltet das Active Set  $\Lambda_p(\theta)$  alle die Einträge  $\Lambda_p(\theta)_{\theta = \min_{ij} a_{ij}} = \{1, \dots, N\}$ . Gilt dies für alle  $p$ , so ist  $\Lambda_{pq}(\theta)$  gerade das globale Active Set  $\Lambda(\theta)$ , dass alle Einträge umfasst

$$\lambda(\theta)_{|\theta = \min_{ij} a_{ij}} = N$$

Mit diesen Hilfsmitteln kommen wir nun zu folgenden Theoremen:

### 3.1.4 Theorem 2.1 (vgl. [SM11] S. 9)

Sei  $\{x_i(t), v_i(t)\}_i$  eine Lösung des allgemeineren dynamischen Systems (4.1). Sei  $\theta$  beliebig, aber fest und sei  $\lambda_{pq}$  die Anzahl der Einträge im Active Set  $\Lambda_{pq}(\theta)$  gemäß der Einflussmatrix dieses allgemeinen Systems. Dann genügen die Positions- und Geschwindigkeitsdurchmesser dieser Lösung,  $d_X(t)$  und  $d_V(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} d_X(t) \leq d_V(t), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt} d_V(t) \leq -\alpha \min_{pq} \lambda_{pq}^2(\theta) \theta^2 d_V(t). \tag{4}$$

Beweis:

Betrachte zu Beginn zwei Trajektorien  $x_p(t)$  und  $x_q(t)$ , wobei  $p$  und  $q$  später genauer beschrieben werden. Ihre relative Distanz beträgt,

$$\frac{d}{dt}|x_p - x_q|^2 = 2\langle x_p - x_q, v_p - v_q \rangle \leq 2|x_p - x_q||v_p - v_q|.$$

Daraus folgt

$$\frac{d}{dt}|x_p(t) - x_q(t)| \leq d_V(t),$$

und die erste Ungleichung.

Als nächstes betrachten wir die dazugehörige relative Distanz im Geschwindigkeitsraum:

$$\frac{d}{dt}|v_p - v_q|^2 = 2\alpha\langle v_p - v_q, \dot{v}_p - \dot{v}_q \rangle \quad (5)$$

$$= 2\alpha\langle v_p - v_q, \bar{v}_p - \bar{v}_q \rangle - 2\alpha|v_p - v_q|^2, \quad (6)$$

wobei  $\bar{v}_p$  und  $\bar{v}_q$  die am Anfang des Kapitels definierten durchschnittlichen Geschwindigkeiten sind. Sei nun gegeben, dass  $\sum_l a_{kl} \equiv 1$ , dann ist der Unterschied der Durchschnittsgeschwindigkeiten gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{v}_p - \bar{v}_q &= \sum_j a_{pj}v_j - \bar{v}_q = \sum_j (v_j - \bar{v}_q) \\ &= \sum_j a_{pj}(v_j - \sum_i a_{qi}v_i) = \sum_j \sum_i a_{pj}a_{qi}(v_j - v_i). \end{aligned}$$

Setzt man das nun in (6) ein, erhält man,

$$\frac{d}{dt}|v_p - v_q|^2 = 2\alpha\left(\sum_{ij} a_{pj}a_{qi}\langle v_p - v_q, v_j - v_i \rangle - |v_p - v_q|^2\right).$$

Um die rechte Seite nach oben einzuschränken, verwenden wir *Lemma 1* mit  $u_i = a_{pi}$ ,  $w_i = a_{qi}$  und der antisymmetrischen Matrix  $S_{ij} = \langle v_p - v_q, v_j - v_i \rangle$ . Da  $|S_{ij}| \leq d_V^2$ ,  $\bar{U} = \sum_i u_i = 1$  und  $\bar{W} = \sum_i w_i = 1$ , folgt

$$\left| \sum_{ij} a_{pj}a_{qi}\langle v_p - v_q, v_j - v_i \rangle \right| \leq d_V^2(1 - \lambda_{pq}^2(\theta)\theta^2).$$

Hier ist  $\lambda_{pq}(\theta)$  die Anzahl an Einträgen im Active Set  $\Lambda_{pq}(\theta)$

$$\lambda_{pq}(\theta) = |\{j | a_{pj} \geq \theta \text{ und } a_{qj} \geq \theta\}|.$$

Also gilt.

$$\frac{d}{dt}|v_p - v_q|^2 \leq 2\alpha(d_V^2(q - \lambda_{pq}^2(\theta)\theta^2) - |v_p - v_q|^2).$$

Wenn man  $p$  und  $q$  schließlich so wählt, dass  $|v_p(T) - v_q(t)| = d_V(t)$  ist, steht in der letzten Ungleichung

$$\frac{d}{dt}d_V^2(t) \leq -2\alpha \min_{pq} \lambda_{pq}^2(\theta)\theta^2 d_V^2(t)$$

und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Da  $\Lambda(\theta) \subset \Lambda_{pq}(\theta)$  ist und damit auch  $\lambda_{pq}(\theta) \geq \lambda(\theta)$  und (4) gilt, folgt zudem die allgemeine Form:

### 3.1.5 Theorem 2.2 (vgl. [SM11] S. 10)

Sei  $\theta > 0$  beliebig aber fest und sei  $\lambda(\theta)$  die Anzahl an Einträgen des globalen Active Set  $\Lambda(\theta)$ , das sich aus dem allgemeinen dynamischen Systems (4.1) ergibt. Dann gilt für die Positons- und Geschwindigkeitsdurchmesser der Lösung  $d_X(t)$  und  $d_V(t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_X(t) &\leq d_V(t), \\ \frac{d}{dt}d_V(t) &\leq -\alpha\lambda^2(\theta)\theta^2d_V(t).\end{aligned}$$

Das heißt also, dass  $d_V(t)$  in der Zeit kleiner wird. Mit diesen beiden Theoremen, lässt sich nun die Schwarmbildung von Systemen der Form

$$\frac{d}{dt}x_i = v_i, \quad \frac{d}{dt}v_i = \alpha(\bar{v}_i - v_i)$$

mit

$$\bar{v}_i := \sum_{j=1}^N a_{ij}v_j, \quad \sum_j a_{ij} = 1$$

zeigen. Dabei ist die richtige Wahl der Grenze  $\theta = \theta(d_X(t))$  für die Konvergenz von  $d_V(t) \rightarrow 0$  entscheidend. Dieser Kontext führt dazu, folgende dynamische Ungleichungen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_X(t) &\leq d_V(t), \\ \frac{d}{dt}d_V(t) &\leq -\alpha\psi(d_X(t))d_V(t).\end{aligned}$$

Dabei bestimmt  $\psi(\cdot) > 0$  das Langzeitverhalten des Systems und zwar:

### 3.1.6 Lemma 2 (vgl. [SM11] S. 12)

Betrachte die Durchmesser  $d_X(t)$ ,  $d_V(t)$  bestimmt durch (1) und (2), wobei  $\psi(\cdot)$  eine positive Funktion ist, so dass

$$d_V(0) \leq \int_{d_X(0)}^{\infty} \psi(r)dr.$$

Dann konvergiert das zugrundeliegende dynamische System zu einem Schwarm, also

$$\sup_{t \geq 0} d_X(t) < +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d_V(t) = 0.$$

Insbesondere kommt es zu unconditional flocking also immer zur Schwarmbildung, wenn gilt:

$$\int^{\infty} \psi(r)dr = \infty.$$

Beweis:

Betrachte das Energiefunktional  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ ,

$$\varepsilon(d_X, d_V)(t) := d_V(t) + \alpha \int_0^{d_X(t)} \psi(s)ds$$

Entlang der Trajektorie  $(d_X, d_V)$  nimmt die Energie  $\varepsilon$  ab,

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(d_X, d_V) = \dot{d}_V + \alpha\psi(d_X)\dot{d}_X \leq -\alpha\psi(d_X)d_V + \alpha\psi(d_X)d_V = 0.$$

Daraus folgt

$$d_V(t) - d_V(0) \leq -\alpha \int_{d_X(0)}^{d_X(t)} \psi(s)ds$$

Wegen der Annahme  $d_V(0) \leq \int_{d_X(0)}^{\infty} \psi(r) dr$  existiert nun ein  $d_* > 0$ , das unabhängig von  $t$  ist, so dass

$$d_V(0) = \alpha \int_{d_X(0)}^{d_*} \psi(s) ds.$$

Für die vorherige Gleichung bedeutet dies

$$d_V(t) \leq \alpha \int_{d_X(0)}^{d_*} \psi(s) ds - \alpha \int_{d_X(0)}^{d_X(t)} \psi(s) ds = \alpha \int_{d_X(t)}^{d_*} \psi(s) ds.$$

Für  $d_V(t) \geq 0$  gilt, dass der Schwarm einen einheitlich begrenzten Durchmesser

$$d_X(t) \leq d_* \quad \forall t \geq 0,$$

besitzt. Dies impliziert, dass der Geschwindigkeitsphasenraum des Schwarms für einen abfallenden Durchmesser  $d_V(t)$  gegen 0 konvergiert. Es gilt

$$\frac{d}{dt} d_V(t) \leq -\alpha \psi_* \cdot d_V(t), \quad \psi_* := \min_{0 \leq r \leq d_*} \psi(r) > 0$$

Mit der Gronwall Ungleichung[[Bur] S. 6] folgt nun, dass  $d_V(t)$  exponentiell schnell gegen 0 konvergiert.  $\square$

Nun sind wir soweit, dass wir die Konvergenz für unser Anfangssystem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt} v_i &= \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^N \phi_{ik}} \sum_{j=1}^N \phi_{ij} (v_j - v_i), \quad \phi_{ij} = \phi(|v_j - v_i|), \end{aligned}$$

unter der Annahme, dass die Einflussfunktion  $\phi(|x_j - x_i|)$  nicht quadratisch integrierbar ist,  $\int^{\infty} \phi^2(r) dr = \infty$ , also langsam genug fällt, zeigen können.

### 3.1.7 Theorem 3 (vgl. [SM11] S. 13)

Betrachte das Modell 3.0.1 und nehme an, dass für die Einflussfunktion  $\phi$  gilt,

$$d_V(0) \leq \int_{d_X(0)}^{\infty} \phi^2(r) dr.$$

Dann konvergiert die Lösung  $\{(x_i(t), v_i(t))\}_i$  zu einem Schwarm, also es gilt:

$$\sup_{t \geq 0} d_X(t) < +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d_V(t) = 0.$$

Insbesondere kommt es zu unconditional flocking, falls  $\phi^2$  nicht integrierbar ist,

$$\int^{\infty} \phi^2(r) dr = +\infty.$$

Beweis:

Da  $\phi(d_X) \leq \phi_{ij} \leq 1$  ist, gilt für die Orientierungskoeffizienten  $a_{ij}$ , dass sie nach oben beschränkt sind

$$a_{ij} = \frac{\phi(|x_j - x_i|)}{\sum_k \phi(|x_k - x_i|)} \geq \frac{\phi(d_X)}{N}.$$

Setze nun  $\theta$  gerade als diese Untergrenze.

$$\theta(t) = \frac{\phi(d_X)}{N}$$



Somit beinhaltet das globale Active Set  $\Lambda(\theta(t))$  gerade alle Einträge und  $\lambda(\theta) = N$  und somit gilt auch *Theorem 2.2*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}d_X(t) &\leq d_V(t), \\ \frac{d}{dt}d_V(t) &\leq -\alpha N^2 \left(\frac{\phi(d_X(t))}{N}\right)^2 d_V(t) = \alpha \phi^2(d_X(t)) d_V(t).\end{aligned}$$

Mit *Lemma 2* und  $\psi(r) = \phi^2(r)$  folgt dann die Konvergenz. □

Insbesondere bedeutet dieses Lemma, dass die Geschwindigkeit des gesamten Schwarms sich angleichen wird, also für jedes Individuum gilt,

$$\lim v_i(t) = v_\infty.$$

### 3.2 Ein oder mehrere Anführer in einer Gruppe

Als ein Beispiel, wie man das Modell noch weiter spezifizieren kann, wird im folgenden eine mögliche Modellierung eines Anführers innerhalb der Gruppe vorgestellt.

#### 3.2.1 Definition 3 (vgl. [SM11] S. 14)

Betrachte das dynamische System

$$\frac{d}{dt}c_i = v_i, \quad \frac{d}{dt}v_i = \alpha \sum_{j \neq i} a_{ij}(v_j - v_i), \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{j \neq i} a_{ij} \leq 1.$$

Ein Mitglied  $p$  ist ein Anführer, wenn ein unabhängiges  $\beta > 0$  existiert, so dass

$$a_{ip}(t) \geq \beta \phi(|x_p - x_i|), \quad \text{für jedes } i.$$

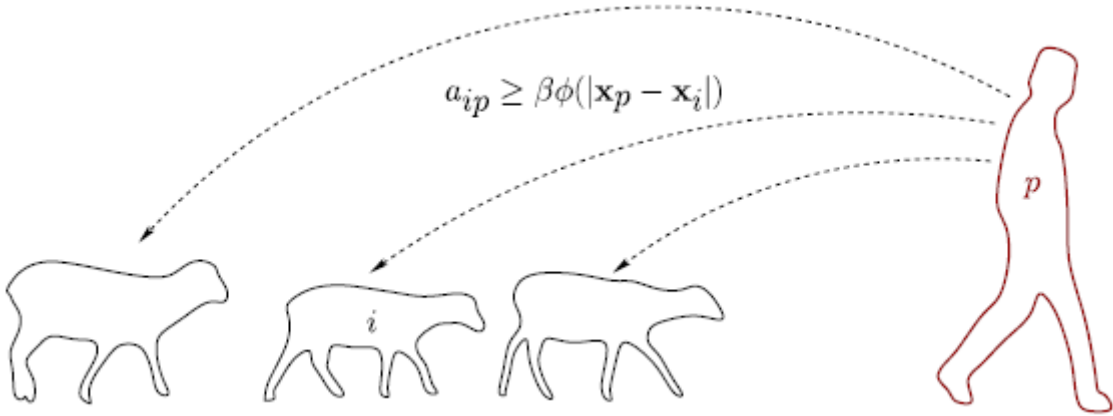


Abbildung 16: ([SM11]S. 14)

Das heißt, ein Individuum wird als Anführer gesehen, wenn sein Einfluss auf die Orientierung aller anderen Individuen zwar mit wachsender Distanz abnimmt, aber nicht von der Anzahl der Gruppenmitglieder abhängt. Im folgenden dynamischen System wird sich der Anführer dann mit konstanter Geschwindigkeit bewegen,

$$\frac{d}{dt}x_i = v_i, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}v_i = \alpha \sum_{j \neq i} a_{ij}(v_j - v_i), \tag{8}$$

wobei

$$a_{pj} = 0, \quad a_{ij|i \neq p} = \begin{cases} \beta \phi(|x_p - x_i|), & j = p \\ \frac{1-\beta}{N} \phi(|x_j - x_i|) & j \neq p. \end{cases}$$

Dazu ist zu sagen, dass hier nur ein Anführer beschrieben ist. Analog könnte man aber auch mehrere Anführer einfügen. Bleibt noch zu zeigen, dass auch dieses System mit Anführer zur Schwarmbildung führt.

### 3.2.2 Theorem 4 (vgl. [SM11] S. 14)

Sei  $\{x_i(t), v_i(t)\}$  die Lösung des Systems (7),(8). Dann führt  $\{x_i(t), v_i(t)\}$  zu bedingter beziehungsweise unbedingter Schwarmbildung, je nachdem, ob  $d_V(0) \leq \int_{d_X(0)}^{\infty} \phi^2(r) dr$  beziehungsweise  $\int_{d_X(0)}^{\infty} \phi^2(r) dr = +\infty$  gilt.

Beweis: Setze  $\theta = \beta \phi(d_X(t))$ . Dann gehört der Anführer  $p$  zu allen Active Sets,  $\Lambda_i(\theta)$  und auch zum globalen Active Set  $\Lambda(\theta)$ . Somit ist  $\lambda(\theta) \geq 1$ . Dann ergeben sich die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} d_X(t) &\leq d_V(t), \\ \frac{d}{dt} d_V(t) &\leq -\alpha \beta^2 \phi^2(d_X(t)) d_V(t). \end{aligned}$$

Mit Lemma 2 und  $\psi(r) = \phi^2(r)$  folgt die Behauptung □

### 3.3 Kinetisches Modell (vgl. [SM11] S. 15 f)

Nun ist es wieder an der Zeit, das Modell

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt} v_i &= \frac{\alpha}{\sum_{k=1}^N \phi_{ik}} \sum_{j=1}^N \phi_{ij} (v_j - v_i), \quad \phi_{ij} = \phi(|v_j - v_i|), \end{aligned}$$

für große  $N$  umzuformulieren, um es handhabbar zu halten. Dazu nehmen wir wieder die empirische Verteilung  $f^N(t, x, v)$ ,

$$f^N(t, x, v) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)} \otimes \delta_{v_i(t)},$$

wobei  $\delta_x \otimes \delta_y$  das Dirac-Maß auf dem Raum  $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^d$  ist. Wenn man nun die empirische Verteilung  $f^N$  nach der Geschwindigkeitsvariable  $v$  integriert, erhält man die Dichteverteilung  $\rho^N(t, x)$ ,

$$\rho^N(t, x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i(t)}(x).$$

Wenn man nun beide Verteilungen  $f^N$  und  $\rho^N$  in das Modell einbaut, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x_i &= v_i \\ \frac{d}{dt} v_i &= \alpha \frac{\int_{y,w} \phi(|y - x_i|) (w - v_i) f^N(y, w) dy dw}{\int_y \phi(|y - x_i|) \rho^N(y) dy}. \end{aligned}$$

Nun lässt sich zeigen, dass die empirische Verteilung  $f^N$  die schwache Liouville-Gleichung erfüllt (vgl. [SM11] S. 14),

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F[f]f) = 0,$$

wobei das Vektorfeld  $F[f]$  und die Gesamtmasse  $\rho$  gegeben ist durch

$$F[f](x, v) := \alpha \frac{\int_{y,w} \phi(|y - x_i|) (w - v_i) f^N(y, w) dy dw}{\int_y \phi(|y - x_i|) \rho^N(y) dy},$$

$$\rho(y) = \int_w f(y, w) dw.$$

Wenn man nun annimmt, dass für  $N \rightarrow \infty$  die Anfangswerte  $f_0^N(x, v)$  gegen eine stetige Funktion  $f_0(x, v)$  konvergieren, folgt, dass  $f^N(t, x, v)$  gegen die Lösung  $f(t, x, v)$  für die kinetische Gleichung konvergiert

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F[f]f) = 0, \\ f_{t=0} = f_0 \end{cases},$$

wobei zu sagen ist, dass die genaue Argumentation sehr viel umfassender wäre. Ein mögliches Problem bekommt man zum Beispiel bei der Lipschitzbedingung des Vektorfeldes  $F[f]$ .

## 4 Anwendungsbereiche

Zum Ende hin soll noch ein kurzer Ausblick gegeben werden, der auf die Bereiche abzielt, in denen solche oder ähnliche Modelle zum Einsatz kommen. Dabei bieten sie vermutlich keine kompletten Antworten auf die Frage: Wozu das ganze überhaupt? Aber zumindest Erklärungsversuche.

### 4.1 Darwin (vgl. [JC10] S. 7)

Ein erstes Beispiel ist die ESA-Mission Darwin. In dieser ging es darum, erdähnliche Planeten, die um andere, weit entfernte Sterne kreisen, zu finden. Zudem sollte zusätzlich die Atmosphäre untersucht werden, mit dem Ziel, chemische Signaturen von Leben zu finden. Dazu war vorgesehen eine Flotte von mehreren (drei bis vier) Raumschiffen gesendet werden, die sich untereinander möglichst energieeffizient verständigen sollten um als Gruppe weit zu kommen wie möglich. Hier wurden zum Beispiel Resultate des Cucker-Smale-Modelles verwendet.

### 4.2 Virtuelle Schwärme (vgl. [Bal00])

Ein weiterer Bereich ist natürlich die Modellierung von Schwärmen an sich, wie sie gerade für den Bereich Film/Fernsehen/Videospiele benötigt werden. So kann für Filme ein Schwarm Vögel oder Insekten modelliert werden, im Bereich der Videospiele ist dies dann gleich verbunden mit der künstlichen Intelligenz. Damit ist gemeint, dass nicht nur ein Schwarm oder eine Gruppe an sich modelliert wird, sondern auch ihr Verhalten, wenn eine bestimmte Situation eintritt, so könnten bestimmte Bereiche, also Flächen, die der Spieler betritt oder Gegenstände, die er aufnimmt dazu führen, dass ein Flucht- oder Angriffsverhalten auftritt. Eine mögliche Modellierung wäre mittels cutoff Funktionen denkbar.

### 4.3 Synthetisiertes Schwarmverhalten (vgl. [Kri])

Im wissenschaftlichen Bereich können Verhaltensmerkmale auf künstliche Systeme übertragen und diese beobachtet werden um Abläufe zu optimieren oder Rückschlüsse auf Ereignisse innerhalb der Gruppe zu erhalten. Hier raus haben sich mehrere Wege entwickelt.

Einer davon ist die *idealisierte Synthese*. Damit sind Algorithmen gemeint, die auf idealisiertem Schwarmverhalten beruhen. Diese findet man dann in sogenannten *Metaheuristiken* wieder, die zur Approximation von Lösungen für Optimierungsprobleme verwendet werden. Das Besondere dabei ist, sie einen allgemeinen Lösungsweg für beliebige Probleme aufzeigen, also nicht nur für spezielle Probleme Lösungen bieten, wobei zu sagen ist, dass dann die Parameter wiederum sich am Problem orientieren. Ein Beispiel ist der *ACO – Algorithmus*. Er basiert auf den Mechanismen bei der Futtersuche von Ameisen. Wenn diese eine Futterquelle gefunden haben, wird der Weg mittels Duftstoffen gekennzeichnet, dem andere Ameisen folgen können. Dabei wird aber zudem der möglichst einfachste Weg gesucht. Somit wandelt sich der vorher eher zufällige Pfad, zum optimalen. Da dieser dann öfter benutzt wird, ist hier die Menge an Duftstoffen am größten. Dieses Prinzip wird dann auf andere Optimierungsprobleme übertragen. Ein weiterer Weg ist die *traditionelle Synthese*. Hier werden die Modelle direkt auf virtuelle oder reale Roboter übertragen und getestet, ob sich das Verhalten nachahmen lässt. Dabei sollen unter anderem die Mechanismen entdeckt werden, die den Schwarm als ganzes agieren lässt zum Beispiel in der Frage, welcher Futterplatz oder Nistplatz ideal ist. Damit lassen sich zum einen Vorhersagen über das Verhalten von Tierschwärmen machen aber es lassen sich eventuelle Veränderungen analysieren, wie etwa Umwelteinflüsse. Am Ende helfen die Modelle die Welt etwas besser zu verstehen und auch effektiver zu nutzen.

## Literatur

- [Agu11] Richardson Agueh, Illner. Analysis and simulations of a refined flocking and swarming model of cucker-smale type. *American Institute of Mathematical Sciences*, 4:1–16, 2011.
- [Bal00] Philip Ball. Flugmanoever: Selbst atome geraten mitunter ins schwaermen. *Der Tagesspiegel*, 2000. Link: <http://www.tagesspiegel.de/weltspiegel/gesundheit/flugmanoever-selbst-atome-geraten-mitunter-ins-schwaermen/175980.html> abgerufen am 01.07.2012.
- [bol] Link: <http://de.wikipedia.org/wiki/Boltzmann-Gleichung> abgerufen am 01.07.2012.
- [Bur] Martin Burger. Skript partielle differentialgleichungen.
- [FC07a] S. Smale F. Cucker. Emergent behavior in flocks. *Automatic Crontrol, IEEE Transactions on*, 52:852–862, 2007.
- [FC07b] Stevee Smale Felipe Cucker. The mathematics of emergence. *Japanese Journal of Mathematics*, pages 3–5, 2007.
- [gas] Link: [http://de.wikipedia.org/wiki/Kinetische\\_Gastheorie](http://de.wikipedia.org/wiki/Kinetische_Gastheorie) abgerufen am 01.07.2012.
- [JC10] G.Toscani F. Vecil J.A. Carrillo, M. Fornasier. *Particle, Kinetic, and Hydrodynamic Models of Swarming*, chapter 3. Springer, 2010.
- [Kri] D. Kriesel. Schwarmverhalten. Link: [http://www.dkriesel.com/science/swarm\\_behavior](http://www.dkriesel.com/science/swarm_behavior) abgerufen am 01.07.2012.
- [mol] Link: <http://de.wikipedia.org/wiki/Molekularfeldtheorie> abgerufen am 01.07.2012.
- [mor] Link: <http://de.wikipedia.org/wiki/Morse-Potential> abgerufen am 01.07.2012.
- [Pul12] Mario Pulvirenti. From hamiltonian particle systems to kinetic equations. Technical report, WIAS, Berlin, 2012.
- [SM11] Eitan Tadmor Sebastien Motsch. A new model of self-organized dynamics and its flocking behavior. *Springer Science+ Business Media*, pages 1–25, 2011.
- [wie] Link: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wiener-Prozess> abgerufen am 01.07.2012.

### **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.  
Münster, den 09. Juli 2012