



# INKOMPRESSIBLE GRENZWERTE KINETISCHER GLEICHUNGEN

BACHELORARBEIT  
zur Erlangung des akademischen Grades  
BACHELOR OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik

Betreuung:  
*Prof. Dr. Martin Burger*

Zweitgutachterin:  
*Prof. Dr. Angela Stevens*

Eingereicht von:  
*Johannes Stamm*

Münster, 29. August 2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Erhaltungsgleichungen</b>	<b>8</b>
2.1	Die Kontinuitätsgleichung . . . . .	8
2.2	Die Impulserhaltungsgleichung . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Die Navier-Stokes Gleichung</b>	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Die Boltzmann Gleichung</b>	<b>14</b>
4.1	Wichtige Eigenschaften und das H-Theorem . . . . .	16
4.2	Gleichgewichtszustände und relative Entropie . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Von der Boltzmann zur Navier-Stokes Gleichung</b>	<b>20</b>
5.1	Asymptotische Fluktuationen . . . . .	22
5.2	Lokale Erhaltungssätze . . . . .	24
5.3	Kompaktheitsargumente . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Schwarmverhalten</b>	<b>30</b>
6.1	Das Modell . . . . .	30
6.1.1	Mikroskopisches Modell . . . . .	30
6.1.2	Mesoskopisches Modell . . . . .	32
6.1.3	Makroskopisches Modell . . . . .	38
6.2	Übergang zwischen kompressibler und inkompressibler Bewegung . . . . .	40
6.3	Randbedingungen . . . . .	43
6.4	Cluster Dynamik . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>53</b>



**Überblick** In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Modelle, die auf kinetischen Gleichungen beruhen, untersucht. Zum Einen werden wir uns mit der Boltzmann- und der Navier-Stokes Gleichung beschäftigen, welche grundlegende Gleichungen für die Fluid Dynamik sind. Zum Anderen wollen wir uns mit einem etwas spezielleren Modell zur Beschreibung der Bewegung von Tieren in Herden auseinandersetzen.

Das Ziel des ersten Teils der Arbeit ist es, die inkompressible Navier-Stokes Gleichung als Grenzwert der Boltzmann Gleichung zu entwickeln. Dies wird motiviert, indem zunächst der Zusammenhang zwischen der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung und den Erhaltungsgleichungen erläutert wird. Als nächstes werden grundlegende Eigenschaften der Boltzmann Gleichung gezeigt, die für folgende Beweise wichtig sind. Um eine Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung zu finden, verfolgen wir den Ansatz, den Erwartungswert für die Geschwindigkeit der Lösung der Boltzmann Gleichung richtig zu skalieren und so ein Geschwindigkeitsfeld zu erhalten, für das wir zeigen können, dass es die Navier-Stokes Gleichung erfüllt.

Im zweiten Abschnitt wollen wir ein Modell für die Bewegung einzelner Tiere aufstellen und dann überlegen, wie sich das Modell entwickeln lässt, um effizient die Bewegung sehr vieler Tiere zu beschreiben. Für dieses Modell werden einige Annahmen erläutert, die nötig sind, um ein eindeutiges Modell zu erhalten.

# 1 Einführung

Die Modellierung der Dynamik von Fluiden ist ein wichtiger Aufgabenbereich der modernen angewandten Mathematik. Bewegte Fluide spielen in ganz verschiedenen Bereichen eine immer größere Rolle. So finden wir Anwendungsbereiche in ganz unterschiedlichen Bereichen der Ingenieurwissenschaften. Beispielsweise werden Strömungseigenschaften in Turbinen mit Hilfe der Erkenntnisse der Fluid Dynamik optimiert oder Schiffe und Flugzeuge stromlinienförmiger konzipiert. Auch Brücken und Hochhäuser können sicherer gebaut werden, da es möglich ist, Resonanzkatastrophen, die in Folge von Windwirbeln entstehen können, besser ein zu schätzen. Doch auch außerhalb der Ingenieurwissenschaften gibt es diverse Anwendungsbereiche, in denen Kenntnis über die Dynamik von Fluiden benötigt wird, wie zum Beispiel bei der realistischen Wasseranimation in Filmen und Videospielen oder bei der Wettervorhersage.

Außerdem ist die Fluid Dynamik mathematisch höchst interessant und aktuell. So ist beispielsweise die Existenz und die Regularität der Lösung für die dreidimensionale inkompressible Navier-Stokes Gleichung bis heute nicht vollständig gezeigt. Dieses Problem wurde sogar in die Liste der Millennium-Probleme vom CMI aufgenommen.

Bereits Mitte des 18. Jahrhundert leitete Leonhard Euler ein mathematisches Modell zur Beschreibung von perfekten Fluiden, also solchen ohne innerer Reibung, her. Etwas später, in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, leiteten Claude Louis Marie Henri Navier und George Gabriel Stokes ein Modell für viskose Fluide, also solchen mit innerer Reibung, her. Beide Modelle haben die Schwäche, dass sie das Verhalten der Fluide nicht aus mikroskopischen Tatsachen herleiten, sondern Zustandsgleichungen und Größen, wie Viskosität und Wärmefluss, als experimentell gegeben auffassen. Die große Stärke der Modelle ist hingegen, dass sie mit makroskopischen Größen arbeiten. Das heißt, dass alle Daten die wichtig sind, um das Verhalten eines Fluides zu beschreiben, auch praktisch messbar sind. Aus diesem Grund werden diese Modelle auch heute noch verwendet.

In der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts befassten sich James Clerk Maxwell und Ludwig Boltzmann mit der Gastheorie. Neu war, dass sie Gas als sich bewegende Atome auffassten und makroskopische Größen, wie die Temperatur, auf Eigenschaften der Atome, wie deren Bewegungsgeschwindigkeit, zurückführten. Das so entstandene Modell beschreibt die Dynamik von Fluiden durch Stöße und Bewegungen von Atomen. Es hat den Vorteil, dass es aus mikroskopischen Tatsachen hergeleitet wurde, also keine phenomenologischen Größen oder experimentell bestimmten Werte einfließen. Der Nachteil ist jedoch, dass jedes Atom im Gas betrachtet werden muss. Aufgrund der großen Anzahl von Atomen in Gasen oder Flüssigkeiten ist diese Modell also nicht in der Praxis anwendbar.

Die Idee ist es nun, aus dem Modell von Boltzmann das von Euler, beziehungsweise das von Navier und Stokes herzuleiten. Denn dadurch werden die Modelle, die praktisch gut anwendbar sind, auf eine theoretisch gesicherte Grundlage, die ohne neue Phenomene

auskommt.

Genau diesen Schritt werden wir hier im ersten Teil dieser Arbeit betrachten. Dabei werden wir uns auf den Fall der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung konzentrieren. Zunächst wird vorgestellt, wie die inkompressible Navier-Stokes Gleichung aus makroskopischen Erhaltungsgleichungen hergeleitet werden kann. Im Anschluss wollen wir Lösungen für dieses Gleichungssystem genauer betrachten. Im zweiten Schritt werden wir dann die Boltzmann-Gleichung und ihre wichtigsten Eigenschaften kennen lernen. Abschließend werden wir das inkompressible Navier-Stokes System aus dem Boltzmann System herleiten.

Im zweiten Teil der Arbeit werden wir das Verhalten von Tierherden im Sinne der Fluid Dynamik untersuchen. Dieser Anwendungsbereich erscheint zunächst nicht intuitiv. Wenn wir jedoch ein Modell für das Verhalten eines einzelnen Tieres aufstellen, werden wir feststellen, dass diese dem mikroskopischen Modell der Gastheorie sehr ähnlich ist. Der größte Unterschied zum ersten Teil der Arbeit ist, dass die Interaktion zwischen Tieren, im Gegensatz zu der von Gasteilchen, nicht konservativ ist.

Um das Schwarmverhalten, also die Bewegung von Tieren in Herden, zu untersuchen, werden wir das Modell für einzelne Tiere in ein Modell überführen, welches besser geeignet ist um eine sehr große Anzahl von Tieren auf einmal zu beschreiben. Auch hier sind die Ergebnisse denen der Gastheorie sehr ähnlich. Wir werden feststellen, dass man das gesamte Gebiet in dem sich Tiere aufhalten, als ein Gebiet auffassen kann, in dem ein Fluid verteilt ist. In den Bereichen, in denen sich Tierherden aufhalten, können wir das Fluid als inkompressibel auffassen, in den Bereichen, in denen vereinzelt Tiere umherlaufen, ist das Fluid hingegen kompressibel. Regionen, in denen sich keine Tiere aufhalten, werden als Vakua aufgefasst.

Wir werden dann noch kurz darauf eingehen, was an den Übergängen zwischen den verschiedenen Regionen des Fluides passiert.

Um den Lesefluss nicht zu stören, werden wir alle Operatoren, Variablen und Notationen die intuitiv erscheinen, nicht erklären. Diese werden im Anhang genau definiert und können so bei Unklarheiten nachgeschlagen werden.

## 2 Grundlegende Erhaltungsgleichungen

In der klassischen Physik, also der Physik, die vor der Quantenmechanik und vor der Relativitätstheorie bekannt war, befasst sich das Teilgebiet der Mechanik mit der Dynamik von Teilchen und Kontinua. In der klassischen Mechanik gelten drei wichtige Erhaltungssätze: Massenerhaltung, Impulserhaltung und Energieerhaltung. Die Navier-Stokes Gleichung kann aus diesen Erhaltungssätzen hergeleitet werden. Im Fall von inkompressiblen Fluiden benötigen wir sogar nur die Massen- und die Impulserhaltung. Betrachten wir diese also zunächst genauer.

Wir werden uns in diesem Kapitel an den Ergebnissen von C. Eck, H. Garcke und P. Knabner [5] orientieren.

### 2.1 Die Kontinuitätsgleichung

Die Massenerhaltung im klassischen Sinne bedeutet ganz einfach, dass Masse nicht verschwinden oder erzeugt werden kann. Betrachten wir ein geschlossenes System, mit  $n$  Teilchen der Masse  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dann bleibt die Gesamtmasse  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  zeitlich konstant. Es gilt also  $\frac{d}{dt}m = 0$ . Wir wollen uns davon lösen jedes Teilchen einzeln zu beschreiben und stattdessen ganz viele Teilchen als ein Kontinuum auffassen. Wir gehen dazu über jedem Punkt  $x$  im Raum eine Massedichte  $\rho(x) = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$  zuzuordnen. So ergibt sich im Gebiet  $\Omega$  die Gesamtmasse  $m = \int_{\Omega} \rho dx$ . Betrachten wir ein offenes System, kann sich die Gesamtmasse ändern. Dazu gibt es zwei verschiedene Betrachtungsweisen: Entweder hat das System ein festes Gebiet  $\Omega$ , dann entspricht die Massenänderung einem Massefluss über den Rand  $\partial\Omega$  des Gebietes in das System, oder das Gebiet, welches das System umschließt, kann sich im Laufe der Zeit verändern. Da wir jedoch durch beide Betrachtungsweisen die selbe Gleichung erhalten, wollen wir hier nur die erste benutzen. Nehmen wir also an es gibt einen Massestrom, beziehungsweise im Kontinuumsfall, einen Massendichtestrom  $j = \text{Massendichte } \rho \cdot \text{Strömungsgeschwindigkeit } u$  über den Rand, mit  $j \equiv j(t, x)$ ,  $\rho \equiv \rho(t, x)$  und  $u \equiv u(t, x)$ . So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(t, x) dx + \int_{\partial\Omega} j(t, x) \cdot n d\xi = 0,$$

wobei  $n \in \mathbb{R}^3$  der Normaleneinheitsvektor auf dem Rand von  $V$  ist und  $x \in \mathbb{R}^3$  der Ort, sowie  $t \in \mathbb{R}_+$  die Zeit. Setzen wir  $j = \rho u$  ein und wenden den Satz von Gauß an folgt:

$$\int_{\Omega} \frac{d}{dt} \rho(t, x) dx + \int_{\Omega} \nabla_x \cdot (\rho(t, x) u(t, x)) dx = 0$$



**2.1 Definition** (Kontinuitätsgleichung)

Sei  $\rho(t, x) \in \mathbb{R}$  die Massendichte und  $u(t, x) \in \mathbb{R}^3$  die Strömungsgeschwindigkeit, so heißt

$$\partial_t \rho(t, x) + \nabla_x \cdot (\rho(t, x)u(t, x)) = 0 \tag{1}$$

die Kontinuitätsgleichung in differentieller Form.

**2.2 Die Impulserhaltungsgleichung**

Der Impuls ist eine weitere Größe, die sich als sehr nützlich in der Beschreibung der Dynamik eines Teilchens herausgestellt hat. In der klassischen Physik wird der Impuls  $P$  wie folgt definiert: *Impuls = Masse · Geschwindigkeit* also  $P = mu$ . In einem System mit  $n$  Teilchen mit den zugehörigen Impulsen  $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ , ist der Gesamtimpuls  $P = \sum_{i=1}^n P_i$  eine Erhaltungsgröße. Das heißt, dass der Gesamtimpuls  $P$  zeitlich konstant bleibt, beziehungsweise nach Newtons zweitem Axiom der anliegenden Kraft  $F$  entspricht. Es gilt also  $\frac{d}{dt}P = F$ . Möchten wir auch hier die Kontinuums-Formulierung betrachten, so benötigen wir einen Begriff für die Impulsdichte. Naheliegend ist es, dafür das Produkt aus Massendichte und Geschwindigkeit in dem jeweiligen Ort zu nutzen. Außerdem sollten wir uns klar machen, dass in diesem Fall zwei unterschiedliche Kraftarten anliegen können. Zum Einen flächenbezogene Kräfte  $b$ , wie die Spannung, die auf die Oberfläche des Gebiets wirken, zum anderen massebezogene Kräfte  $f$ , wie die Gravitation, die auf das gesamte Gebiet wirken. So ergibt sich für ein Gebiet  $\Omega(t)$  mit Oberfläche  $\partial\Omega(t)$  die Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(t, x)u(t, x)dx = \int_{\Omega(t)} \rho(t, x)f(t, x)dx + \int_{\partial\Omega(t)} b(t, x)d\xi$$

Mit dem Reynoldschen Transport Theorem folgt weiter

$$\int_{\Omega(t)} \partial_t (\rho(t, x)u_j(t, x)) + \nabla_x \cdot (\rho(t, x)u_j(t, x)u(t, x)) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(t, x)f(t, x)dx + \int_{\partial\Omega(t)} b(t, x)d\xi$$

für alle Komponenten  $j = 1, 2, 3$ . Mit dem Satz von Gauß lässt sich der Oberflächenkraft Term schreiben als

$$\int_{\partial\Omega(t)} b(t, x)d\xi = \int_{\partial\Omega(t)} \sigma(t, x) \cdot n d\xi = \int_{\Omega(t)} \nabla_x \cdot \sigma(t, x)dx$$

Mit dieser Schreibweise wird die obige Gleichung zu

$$\int_{\Omega(t)} \partial_t (\rho(t, x)u_j(t, x)) + \nabla_x \cdot (\rho(t, x)u_j(t, x)u(t, x)) - \rho(t, x)f(t, x) - \nabla_x \cdot \sigma(t, x)dx = 0,$$

wobei  $\sigma$  als Spannungstensor bezeichnet wird, doch dazu später mehr. Weiterhin folgt mit Kettenregel und Gleichung (1)

$$\int_{\Omega(t)} \rho(t, x) \partial_t u_j(t, x) + \rho(t, x) u(t, x) \cdot \nabla u_j(t, x) - \rho(t, x) f(t, x) - \nabla_x \cdot \sigma(t, x) dx = 0.$$

**2.2 Definition** (Impulserhaltungsgleichung)

Sei  $\rho(t, x) \in \mathbb{R}$  die Massendichte,  $u(t, x) \in \mathbb{R}^3$  die Strömungsgeschwindigkeit,  $\sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der Spannungstensor und  $f(t, x)$  eine äußere Kraft, so heißt

$$\rho(t, x) (\partial_t u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla) u(t, x)) - \nabla_x \cdot \sigma(t, x) = \rho(t, x) f(t, x) \quad (2)$$

die Impulserhaltungsgleichung in differentieller Form.

**Der Spannungstensor**

In der Kontinuumsformulierung der Impulserhaltungsgleichung taucht der Spannungstensor auf. Wir wollen kurz näher erläutern, wie dieser zu verstehen ist. Wenn das Gebiet  $\Omega$  imaginär durch eine glatte Kurve in zwei beliebige Teile  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  geteilt wird, so gibt der Spannungstensor die Kraft an, die senkrecht zu dieser Linie von dem einen auf den anderen Teil wirkt.

Für ideale Fluide, also solche ohne innere Reibung, entspricht die Kraft die im Inneren des Fluides weitergegeben wird, genau der Kraft, die auf die Oberfläche wirkt, also dem äußeren Druck  $\tilde{p}$ . Es gilt also  $\sigma = -\tilde{p}(x, t)I$ , wobei  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  die Einheitsmatrix ist.

Für viskose Fluide, also solche mit innerer Reibung, kommt noch, analog zum Fourier'schen Gesetz, ein Korrekturterm hinzu, welcher linear zum Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes ist. So ergibt sich

$$\sigma = -\tilde{p}(x, t)I + \lambda D(u(x, t)), \quad (3)$$

wobei die Konstante  $\lambda$  die Viskosität genannt wird und  $D(u)$  den symmetrisierten Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes bezeichnet und wie folgt definiert ist:  $D(u) = \nabla_x u + (\nabla_x u)^T - \frac{2}{3} \nabla_x \cdot u$ . Dabei ist zu beachten, das  $\nabla_x u$  die Jacobi-Matrix von  $u$  ist.

### 3 Die Navier-Stokes Gleichung

Wir wollen nun aus der Kontinuitäts- und der Impulserhaltungsgleichung die inkompressible Navier-Stokes Gleichung herleiten. Inkompressible Fluide sind solche, die sich nicht zusammendrücken lassen, also eine konstante Massendichte  $\rho(t, x) \equiv \rho$  haben. Dadurch vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (1) nach Teilen durch  $\rho$  zu

$$\nabla_x \cdot u(t, x) = 0, \tag{4}$$

der sogenannten Inkompressibilitätsbedingung. Wir dürfen hier durch  $\rho$  teilen, da wir annehmen, dass die Massendichte  $\rho \neq 0$  ist, da wir sonst keine Teilchen hätten, also auch keine zu beschreibende Dynamik.

Die Impulserhaltungsgleichung (2) vereinfacht sich für konstante Dichten und unter der Annahme, dass keine äußere Kraft anliegt zu

$$\rho(\partial_t u(t, x) + (u(t, x) \cdot \nabla)u(t, x)) - \nabla_x \cdot \sigma(t, x) = 0.$$

Teilen wir auch hier durch  $\rho$  und setzt für den Spannungstensor  $\sigma$  Gleichung (3) ein und nutzt die Inkompressibilitätsbedingung (4), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u &= \frac{1}{\rho} \nabla_x \cdot (-\tilde{p}I + \lambda(\nabla_x u + (\nabla_x u)^T)) \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u &= -\nabla_x \cdot I \frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} \nabla_x \cdot \nabla_x u + \frac{\lambda}{\rho} \nabla_x \cdot (\nabla_x u)^T \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u &= -\nabla_x \frac{\tilde{p}}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} \Delta_x u + \frac{\lambda}{\rho} \nabla_x \underbrace{\nabla_x \cdot u}_{\equiv 0} \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u &= -\nabla_x p + \nu \Delta_x u, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei  $u \equiv u(t, x)$ ,  $\tilde{p} \equiv \tilde{p}(t, x)$  und  $p \equiv p(t, x)$  ist. Der Term  $\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u$  kann, wie folgt, noch kompakter geschrieben werden, wenn wir ausnutzen, dass das Geschwindigkeitsfeld quellfrei ist.

$$((u \cdot \nabla_x)u)_i := \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overbrace{\sum_{j=1}^3 u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}}{=u_i \nabla_x \cdot u=0} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} =: (\nabla_x \cdot (u \otimes u))_i$$

Setzen wir dies in Gleichung (5) ein, so erhalten wir zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung (4) die Navier-Stokes Gleichung.

---

**3.1 Definition** (Schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichung, F. Golse [6])  
 Sei  $t \in \mathbb{R}_+$  und  $x \in \mathbb{R}^3$ . Ein Vektorfeld  $u(t, x) \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3))$  heißt schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichung, falls gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot u(t, x) &= 0 \\ \partial_t u(t, x) + \nabla_x \cdot (u(t, x) \otimes u(t, x)) + \nabla_x p(t, x) &= \nu \Delta_x u(t, x) \end{aligned} \quad (6)$$

wobei  $p \in \mathbb{R}$  den Druck und die Konstante  $\nu \in \mathbb{R}$  die kinematische Viskosität bezeichnet.

Hier kann  $-\nabla_x p$  als Lagrange-Multiplikator zu der Nebenbedingung  $\nabla_x \cdot u = 0$  aufgefasst werden, so dass wir die Bewegungsgleichung auch als

$$\partial_t u(t, x) + \nabla_x u(t, x) = \nu \Delta_x u(t, x) \text{ bis auf Gradientenfelder} \quad (7)$$

verstehen können.

**3.2 Satz** (Existenz und Energie, J.Leray [10])

Für alle Anfangswerte  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  mit  $\nabla_x \cdot u_0 = 0$  existiert eine schwache Lösung der Navier-Stokes Gleichung mit den Anfangswerten  $u|_{t=0} = u_0$ . Diese Lösung erfüllt die Energieungleichung:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x u(s, x)|^2 dx ds \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |u_0(x)|^2 dx \quad (8)$$

**3.3 Bemerkung**

Für glatte Lösungen  $u$  erhalten wir sogar eine Energiegleichung.

**Beweis:**

Wir wollen das Ergebnis nur für glatte Lösungen zeigen. Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt:

$$\int_0^t \partial_s \|u(s, x)\|_{L^2}^2 ds = \|u(t, x)\|_{L^2}^2 - \|u(0, x)\|_{L^2}^2$$

Weiterhin gilt;

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \partial_s \|u(s, x)\|_{L^2}^2 ds &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_s |u(s, x)|^2 dx ds \\
 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} 2u(s, x) \partial_s u(s, x) dx ds \\
 &\stackrel{Gl.(7)}{=} 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} u(s, x) (-\nabla_x u(s, x) + \nu \Delta_x u(s, x)) dx ds \\
 &\stackrel{P.I.}{=} -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \nabla_x |u(s, x)|^2 + \nu |\nabla_x u(s, x)|^2 dx ds + \underbrace{\int_0^t \int_{\partial \mathbb{R}^3} u \nu \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma ds}_{=0} \\
 &= - \int_0^t \underbrace{\nabla_x \|u(s, \cdot)\|_{L^2}^2}_{=0} ds - 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \nu |\nabla_x u(s, x)|^2 dx ds \\
 &= -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \nu |\nabla_x u(s, x)|^2 dx ds
 \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die erste Gleichung ein, folgt die Behauptung. □

## 4 Die Boltzmann Gleichung

Da eine vollständige Herleitung der Boltzmann Gleichung zu umfangreich für diese Arbeit wäre, wollen wir diese nur kurz vorstellen und die für uns wichtigsten Eigenschaften diskutieren. Das Modell der Boltzmann Gleichung beruht auf der Idee, dass ein Fluid aus Atomen oder Molekülen besteht, die sich ständig untereinander oder gegen einen Rand stoßen. Um dies einfach zu modellieren, werden einige, physikalisch gesehen teilweise haarsträubende, Annahmen zur Vereinfachung getroffen:

- Alle Teilchen im Fluid sind gleich.
- Die Teilchen sind punktförmig, haben also keine räumliche Ausdehnung und sind rund. Der Teilchenradius wird nur betrachtet, um die Streuung nach Stößen zu berechnen.
- Ein Stoß findet immer nur zwischen zwei Teilchen statt und ist elastisch. Diese Stöße werden als instantane und lokale Ereignisse betrachtet.
- Die Teilchen sind unkorreliert.

Die Boltzmann Gleichung beschreibt die Dynamik des Fluids über die Teilchendichte  $F$  im Phasenraum. Der Phasenraum beschreibt die Menge aller möglichen Zustände des Systems. Er wird von den zeitlich veränderlichen Variablen aufgespannt, also dem Ort und dem Impuls eines Teilchens. Damit handelt es sich hier um einen sechsdimensionalen Raum. Unter der Teilchendichte  $F \equiv F(t, x, v)$  können wir uns also die Dichte der Teilchen, die zum Zeitpunkt  $t$  im Ort  $x$  mit der Geschwindigkeit  $v$  sind, vorstellen.

Um die folgenden Überlegungen übersichtlicher darzustellen, wollen wir noch einige abkürzende Notationen einführen, die wir ab jetzt benutzen werden ohne explizit darauf hinzuweisen.

### 4.1 Notation

Für eine beliebige Funktion  $\Phi$  schreiben wir:

$$\Phi := \Phi(v) := \Phi(t, x, v) \quad \Phi' := \Phi(v') := \Phi(t, x, v')$$

$$\Phi_* := \Phi(v_*) := \Phi(t, x, v_*) \quad \Phi'_* := \Phi(v'_*) := \Phi(t, x, v'_*)$$

### 4.2 Definition (Boltzmann Gleichung)

Sei  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$  und  $v \in \mathbb{R}^3$ . Für eine Funktion  $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F \geq 0$  hat die Boltzmann Gleichung die Form:

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x)F(t, x, v) = \mathcal{C}(F) \tag{9}$$

wobei der Stoßoperator  $\mathcal{C}(F)$  wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{C}(F)(v) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \underbrace{(F(v')F(v'_*))}_{\text{gain term}} - \underbrace{F(v)F(v_*)}_{\text{loss term}} \underbrace{|v - v_*|}_{\text{Kollisionskern}} dv_* d\sigma \quad (10)$$

hier sind  $v'$  und  $v'_*$  in Abhängigkeit von  $v, v_* \in \mathbb{R}^3$  und  $\sigma \equiv \sigma(v, v_*) \in \mathbb{S}^2$  definiert:

$$\begin{aligned} v' &= v'(v, v_*, \sigma) = \frac{1}{2}(v + v_*) + \frac{1}{2}|v - v_*|\sigma \\ v'_* &= v'_*(v, v_*, \sigma) = \frac{1}{2}(v + v_*) - \frac{1}{2}|v - v_*|\sigma \end{aligned} \quad (11)$$

Der Stoßoperator  $\mathcal{C}(F)$  modelliert dabei die Situation, dass ein Teilchen mit Geschwindigkeit  $v$  mit einem zweiten Teilchen mit Geschwindigkeit  $v_*$  kollidiert. Nach dem Stoß haben die Teilchen die entsprechenden neuen Geschwindigkeiten  $v'$  beziehungsweise  $v'_*$ . Betrachtet man ein beliebiges, festes Gebiet, so gibt der 'gain term' an, wie viele Teilchen sich durch Stöße in dieses Gebiet bewegen. Der 'loss term' beschreibt, wie viele Teilchen das Gebiet auf Grund von Kollisionen verlassen. Über den Kollisionskern kann man die Art der Stöße modellieren, betrachten man beispielsweise keine elastischen Stöße, ändert sich dieser Term.

Wir gehen im Folgenden immer davon aus, dass  $v \neq v_*$  ist, denn sonst findet zwischen den Teilchen kein Stoß statt. Das ist anschaulich klar, folgt aber auch aus den Gleichungen (11), da für  $v = v_*$  auch  $v = v'$  und  $v'_* = v_*$  gilt.

Die Definitionen für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß rühren aus der klassischen Impulserhaltung für Teilchen bei elastischen Stößen. Durch diesen Zusammenhang ergeben sich folgende Eigenschaften:

### 4.3 Proposition (F. Golse [7])

Seien  $v, v_*, v'$  und  $v'_*$  wie in Def. (4.2), dann gilt:

- i)  $v + v_* = v' + v'_*$
- ii)  $|v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2$

#### Beweis:

- i) Die Behauptung folgt direkt durch Einsetzen der Definitionen von  $v'$  und  $v'_*$ .
- ii) Die Behauptung folgt durch Einsetzen der Definitionen von  $v'$  und  $v'_*$  und doppeltem Anwenden des Satzes von Pythagoras.

□

Da es bei einem Zusammenprall zweier Teilchen egal ist, ob Teilchen a gegen Teilchen b stößt oder ob Teilchen b gegen Teilchen a stößt, dürfen wir in der mathematischen Beschreibung von  $(v, v_*)$  zu  $(v_*, v)$  übergehen. Wenn wir die Variablen so tauschen wird

$(v', v'_*)$  automatisch zu  $(v'_*, v')$ . Dies sehen wir leicht ein, in dem wir in der jeweiligen Definition  $v$  und  $v_*$  tauschen und beachten, dass  $\sigma(v, v_*) = -\sigma(v_*, v)$  gilt.

Genau so ist es egal, ob es sich um die Geschwindigkeit des Teilchens vor oder nach dem Stoß handelt, so dass wir von  $(v, v_*)$  zu  $(v', v'_*)$  übergehen können. Aus diesen Überlegungen ergibt sich eine äußerst wichtige Eigenschaft der Boltzmann Gleichung.

## 4.1 Wichtige Eigenschaften der Boltzmann Gleichung und das H-Theorem

### 4.4 Proposition (F. Golse [7])

Sei  $\phi \in C(\mathbb{R}^3)$  und  $F \in C_c(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mathcal{C}(F)$  wie in Def. (4.2), dann gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(F)(v) \phi(v) dv \\ &= \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F' F'_* - F F_*) (\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*) |v - v_*| dv dv_* d\sigma \end{aligned} \quad (12)$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(F)(v) \phi(v) dv &:= \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F' F'_* - F F_*) \phi |v - v_*| dv_* d\sigma dv \\ &\stackrel{(v, v_*) \rightarrow (v_*, v)}{=} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F'_* F' - F_* F) \phi_* |v_* - v| dv_* d\sigma dv \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F' F'_* - F F_*) (\phi + \phi_*) |v - v_*| dv_* d\sigma dv \\ &\stackrel{(v, v_*) \rightarrow (v', v'_*)}{=} \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F F_* - F' F'_*) (\phi' + \phi'_*) |v' - v'_*| dv_* d\sigma dv \\ &\stackrel{Gl.(11)}{\underset{|\sigma|=1}{=}} \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} -(F' F'_* - F F_*) (\phi + \phi') |v - v_*| dv_* d\sigma dv \\ &= \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F' F'_* - F F_*) (\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*) |v - v_*| dv_* d\sigma dv \end{aligned}$$

□

Um zu der wichtigsten Eigenschaft der Boltzmann Gleichung, dem H-Theorem, zu gelangen, nutzen wir ein weiteres Ergebnis aus der Physik. Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik strebt jedes physikalische System in den Zustand maximaler Entropie. Entropie ist anschaulich als Maß für die Unordnung in einem System zu verstehen und maßgeblich dafür verantwortlich, dass Prozesse irreversibel sind, also in der Zeit nur vorwärts ablaufen können.



**4.5 Definition** (Entropie Produktionsrate, F. Golse [6])

Sei  $F \equiv F(v) \geq 0$  f.ü., schnell abnehmend, so dass  $\ln(F)$  polynomial wächst für  $|v| \rightarrow \infty$  und  $F \in C_c(\mathbb{R}^3)$ ,  $\mathcal{C}(F)$  wie in Def. (4.2), dann ist die Entropie Produktionsrate  $\mathcal{R}(F)$  wie folgt definiert:

$$\mathcal{R}(F) := - \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(F) \ln(F) dv \quad (13)$$

**4.6 Satz** (Das H-Theorem, F. Golse [6])

Seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in (4.5), dann gilt

$$\mathcal{R}(F) \geq 0 \quad (14)$$

und es sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

$$\mathcal{R}(F) = 0 \iff \mathcal{C}(F) = 0 \text{ f.ü.} \iff F \text{ ist Maxwellverteilung}$$

Das heißt, es existieren  $\rho, \theta \in \mathbb{R}_{\setminus\{0\}}^+$  und  $u \in \mathbb{R}^3$ , so dass:

$$F(v) = \mathcal{M}_{(\rho, u, \theta)}(v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2\theta}}$$

**Beweis:**

Zeigen wir zunächst, dass  $\mathcal{R}(F) \geq 0$  ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(F) &\stackrel{(4.5)}{=} - \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F'F'_* - FF_*) \ln(F) |v - v_*| dv_* d\sigma dv \\ &\stackrel{(4.2)}{=} - \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (F'F'_* - FF_*) (\ln(F) + \ln(F_*) - \ln(F') - \ln(F'_*)) |v - v_*| dv dv_* d\sigma \\ &\stackrel{\text{Log.}}{\stackrel{\text{Gesetze}}{=}} \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \underbrace{(F'F'_* - FF_*)}_{\substack{> 0 \text{ für } F'F'_* > FF_* \\ < 0 \text{ für } F'F'_* < FF_* \\ = 0 \text{ für } F'F'_* = FF_*}} \underbrace{\ln\left(\frac{F'F'_*}{FF_*}\right)}_{\substack{> 0 \text{ für } F'F'_* > FF_* \\ < 0 \text{ für } F'F'_* < FF_* \\ = 0 \text{ für } F'F'_* = FF_*}} |v - v_*| dv dv_* d\sigma \geq 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt auch, dass  $\mathcal{R}(F) = 0$  nur genau dann erfüllt sein kann, wenn  $F'F'_* - FF_* = 0$  fast überall ist. In genau diesem Fall ist aber auch das Integral über den Stoßoperator gleich Null und damit  $\mathcal{C}(F) = 0$  fast überall. Damit ist die erste Äquivalenz gezeigt.

Die zweite Äquivalenz zu zeigen, erfordert einen recht langen und technischen Beweis, den wir hier nur skizzieren werden. Wir betrachten dazu die Fouriertransformierte von  $FF_*$ , führen einen Variablentausch wie im Beweis von Proposition (4.4) durch und nutzen die Bedingungen

$$\int_{\mathbb{R}^3} F dv = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^3} vF dv = 0$$

aus. Diese sind erfüllt, da  $F$  eine Dichtefunktion ist. Gegebenenfalls muss  $F$  vorher noch skaliert beziehungsweise um den Erwartungswert verschoben werden.  $\square$

## 4.2 Gleichgewichtszustände und relative Entropie

Wenn dir Entropie Produktionsrate  $\mathcal{R}(F)$  gleich Null ist, so bedeutet dies, dass die Entropie nicht mehr wächst, also maximal ist. Das H-Theorem sagt dann aus, dass die Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeit eine Maxwellverteilung ist. Da jedes System in den Zustand maximaler Entropie strebt, heißt das, dass alle Verteilungsfunktionen, die die Boltzmann-Gleichung erfüllen, sich mit der Zeit einer Maxwellverteilung annähern. Die Maxwellverteilungen bilden also einen Gleichgewichtszustand für das System. Auf Grund von Skalierungs- und Translationseigenschaften der Boltzmann-Gleichung können wir diesen Gleichgewichtszustand ohne Beschränkung der Allgemeinheit als  $M = \mathcal{M}_{(1,0,1)}$  wählen. Dies entspricht der Dichtefunktion der Normalverteilung.

Von nun an fassen wir alle Funktionen, die die Boltzmann-Gleichung erfüllen, als Auslenkungen aus dem Gleichgewichtszustand auf. Wir wollen noch einen weiteren Entropiebegriff einführen, den der relativen Entropie, der besser zu dieser Betrachtungsweise passt.

### 4.7 Definition (F. Golse [6])

Für zwei Funktionen,  $f(x) \geq 0$  und  $g(v) \geq 0$  f.ü. auf  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , ist die relative Entropie von  $f$  relativ zu  $g$  gegeben durch

$$H(f|g) = \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \left[ f \ln \left( \frac{f}{g} \right) - f + g \right] dx dv$$

### 4.8 Proposition

Seien die Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in (4.7), dann ist

$$H(f|g) \geq 0.$$

#### Beweis:

Wir wollen die relative Entropie als  $H(f|g) = \iint I(f, g) dx dv$  auffassen und zunächst zeigen, dass  $I(f, g)$  im ersten Quadranten nicht negativ ist.

ABBILDUNG

$$\begin{aligned} I(f, g) &:= f \ln \left( \frac{f}{g} \right) - f + g = 0 && \text{für } f = g \neq 0 \\ \partial_f I(f, g) &= \ln \left( \frac{f}{g} \right) \geq 0 && \text{für } f \geq g \\ \partial_g I(f, g) &= 1 - \frac{f}{g} \geq 0 && \text{für } f \leq g \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, dass gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{f \rightarrow 0} f \ln \left( \frac{f}{g} \right) &= \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\ln \left( \frac{f}{g} \right)}{\frac{1}{f}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f}}{-\frac{1}{f^2}} = \lim_{f \rightarrow 0} -f = 0 \\ \lim_{f \rightarrow 0} I(f, g) &= g \\ \lim_{g \rightarrow 0} I(f, g) &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Der Integrand ist also nicht negativ auf jedem Punkt der Diagonalen. Unterhalb der Diagonalen wächst  $I$  in  $g$ -Richtung, oberhalb in  $f$ -Richtung. Daher gilt  $I(f, g) \geq 0$  im gesamten Quadranten und damit ist auch die relative Entropie  $H$  dort nicht negativ.  $\square$

Der Stoßterm der Boltzmann Gleichung enthält einen quadratischen Teil, so dass wir keine eindeutigen Lösungen finden. Eine Idee, um Eindeutigkeit zu erreichen, ist die gesamte Gleichung durch  $F$  zu teilen. Dabei tritt das Problem auf, dass wir durch Null teilen würden. Deswegen teilen wir durch  $1 + F$ .

**4.9 Definition** (F. Golse [6])

Eine renormalisierte Lösung der Boltzmann Gleichung ist eine nicht negative Funktion  $F \in C(\mathbb{R}_+; L^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3))$  mit

$$\frac{\mathcal{C}(F)}{1 + F} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3),$$

die die Gleichung

$$(\partial_t + v \cdot \nabla_x) \ln(1 + F) = \frac{\mathcal{C}(F)}{1 + F}$$

erfüllt.

Für diese renormalisierten Lösungen finden wir eine Abschätzung, die wir später für Konvergenzargumente benötigen. Wir wollen die Abschätzung hier ohne Beweis angeben, da dieser sehr ähnlich zu dem Beweis der Energie-Ungleichung (3.2) für Leray Lösungen ist.

**4.10 Satz** (P.-L. Lions[11])

Für alle  $F^{in} \geq 0$  fast überall, so dass  $H(F^{in}|M) < +\infty$ , gibt es eine renormalisierte Lösung  $F$  der Boltzmann Gleichung mit Anfangswerten  $F|_{t=0} = F^{in}$ . Diese renormalisierte Lösung erfüllt für alle  $t \geq 0$  die Entropieungleichung

$$H(F(t)|M) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} R(F)(s, x) dx ds \leq H(F^{in}|M). \quad (15)$$

## 5 Von der Boltzmann zur Navier-Stokes Gleichung

In Boltzmanns Modell haben wir mit der Teilchendichte im Phasenraum gearbeitet, während wir in dem Navier-Stokes Modell mit einem Geschwindigkeitsfeld und einer Dichte gerechnet haben. Da wir nun vom Boltzmann zu dem Navier-Stokes Modell übergehen möchten, müssen wir dieses Geschwindigkeitsfeld aus der Teilchendichte ableiten. Es ist eine naheliegende Idee, dieses Vektorfeld zu gewinnen, indem wir jedem Ort den Erwartungswert der jeweiligen Geschwindigkeitsverteilung zuordnen.

### 5.1 Satz (F. Golse [6])

Sei  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ , so dass  $\nabla_x \cdot u_0 = 0$ . Für alle  $\epsilon > 0$  sei  $F_\epsilon \equiv F_\epsilon(t, x, v)$  eine renormalisierte Lösung der Boltzmann Gleichung (9) mit Anfangswerten

$$F_\epsilon(0, x, v) = \mathcal{M}_{(1, \epsilon u_0(\epsilon x), 1)}(v),$$

dann sind alle Vektorfelder  $u_\epsilon \equiv u_\epsilon(t, x) \in \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$u_\epsilon(t, x) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} v F_\epsilon\left(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon}, v\right) dv$$

schwach relativ kompakt in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$  und im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  Leray Lösung der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung (6) mit Anfangswerten  $u_0$ . Die Viskosität  $\nu$  ist gegeben durch  $\nu = \frac{1}{5} \mathcal{D}^*(v \otimes v - \frac{1}{3}|v|^2 I)$ , wobei  $\mathcal{D}^*$  die Legendretransformierte der Dirichletform des in  $M$  linearisierten Kollisionsintegrals  $\mathcal{C}$  ist.

**Bemerkung:** Wir dürfen hier statt  $F$  eine skalierte Variante benutzen, da wir zeigen können, dass falls  $u \equiv u(t, x)$  eine Lösung der Navier-Stokes Gleichung ist, auch  $\alpha u(\alpha^2 t, \alpha x)$  eine Lösung ist für alle  $\alpha > 0$ .

Physikalisch gesehen wählen wir gerade durch diese Skalierung die Situation die wir beschreiben wollen. Wir legen also hier fest, dass wir ein inkompressibles, viskoses Fluid beschreiben.

### Skizze des Beweises

In der Beweisführung werden wir uns stark an dem Beweis von F. Golse in [6] orientieren und einige Ergebnisse aus [7] verwenden.

Zunächst wollen wir uns in Erinnerung rufen, dass wir die Lösungen  $F$  der Boltzmann Gleichung als Auslenkungen  $G$  aus dem Gleichgewichtszustand  $M = \mathcal{M}_{(1,0,1)}$  auffassen dürfen. Wir nehmen also an, dass sie von der Form  $F = M + G$  sind, beziehungsweise,

wenn man die Auslenkungen  $g$  relativ zu  $M$  betrachtet:  $F = M + M \cdot g$ . Für die skalierte Lösung erhalten wir so

$$g_\epsilon(t, x, v) := \frac{F_\epsilon\left(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon}, v\right) - M(v)}{\epsilon M(v)}. \quad (16)$$

### 5.2 Proposition (Boltzmann Gleichung für relative Fluktuationen)

Sei  $F_\epsilon$  skalierte Lösung der Boltzmann Gleichung (4.2),  $g_\epsilon$  die relativen Fluktuationen in der Teilchendichte definiert wie in Gleichung (16),  $\epsilon > 0$  und  $M = \mathcal{M}_{(1,0,1)}$  die Normalverteilung, dann wird die Boltzmann Gleichung für  $g_\epsilon$  zu

$$\epsilon^2 \partial_t g_\epsilon + \epsilon v \cdot \nabla g_\epsilon + \mathcal{L}g_\epsilon = \epsilon \mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon). \quad (17)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{L}$  den linearen und  $\mathcal{Q}$  den quadratischen Stoßoperator. Diese sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}g_\epsilon &:= \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} M_*(g_\epsilon + g_{\epsilon*} - g'_\epsilon - g'_{\epsilon*}) |v - v_*| dv_* d\sigma \\ \mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) &:= \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} M_*(g'_\epsilon g'_{\epsilon*} - g_\epsilon g_{\epsilon*}) |v - v_*| dv_* d\sigma \end{aligned}$$

#### Beweis:

Sei  $\tau := \frac{t}{\epsilon^2}$  und  $\xi := \frac{x}{\epsilon}$ , so ist  $\epsilon^2 \partial_t = \partial_\tau$  beziehungsweise  $\epsilon \nabla_x = \nabla_\xi$  wegen  $\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a}$ . Damit lässt sich die skalierte Boltzmann Gleichung schreiben als

$$\begin{aligned} &\partial_\tau F(\tau, \xi, v) + v \cdot \nabla_\xi F(\tau, \xi, v) = \mathcal{C}(F(\tau, \xi, v)) \\ \Leftrightarrow &\epsilon^2 \partial_t F\left(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon}, v\right) + \epsilon v \cdot \nabla_x F\left(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon}, v\right) = \mathcal{C}\left(F\left(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon}, v\right)\right) \\ &\stackrel{Gl.(16)}{\Leftrightarrow} \epsilon^3 M \partial_t g_\epsilon + \epsilon^2 M v \cdot \nabla_x g_\epsilon = \mathcal{C}(g_\epsilon \epsilon M + M) \end{aligned} \quad (18)$$

mit  $g_\epsilon \equiv g_\epsilon(t, x, v)$  und  $M \equiv M(v)$ . Zerlegen wir die rechte Seite in

$$\mathcal{C}(g_\epsilon \epsilon M + M)$$

$$\begin{aligned} &:= \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} ((g'_\epsilon \epsilon M' + M')(g'_{\epsilon*} \epsilon M'_* + M'_*) - (g_\epsilon \epsilon M + M)(g_{\epsilon*} \epsilon M_* + M_*)) |v - v_*| dv_* d\sigma \\ &= \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} ((\epsilon^2 g'_\epsilon g'_{\epsilon*} M' M'_* + \epsilon g'_\epsilon M' M'_* + \epsilon g'_{\epsilon*} M' M'_* + M' M'_*) \\ &\quad - (\epsilon^2 g_\epsilon g_{\epsilon*} M M_* + \epsilon g_\epsilon M M_* + \epsilon g_{\epsilon*} M' M_* + M M_*)) |v - v_*| dv_* d\sigma \\ &\stackrel{MM_* = M' M'_*}{=} M \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (\underbrace{\epsilon^2 M_*(g'_\epsilon g'_{\epsilon*} - g_\epsilon g_{\epsilon*})}_{:= \mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon)} - \underbrace{\epsilon M_*(g_\epsilon + g_{\epsilon*} - g'_\epsilon - g'_{\epsilon*})}_{:= \mathcal{L}g_\epsilon}) |v - v_*| dv_* d\sigma \\ &= M(\epsilon^2 \mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) - \epsilon \mathcal{L}g_\epsilon), \end{aligned}$$

dann folgt die Behauptung mit Teilen durch  $\epsilon M$ .  $\square$

**5.3 Bemerkung** (F. Golse [6])

Die Operatoren  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{L}$  können auch direkt über den Stoßoperator  $\mathcal{C}$  definiert werden:

$$\mathcal{L} := -\frac{1}{M}DC(M)(Mg) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{Q} := \frac{1}{2M}D^2\mathcal{C}(M)(Mg, Mg)$$

Der Beweis wird nun in drei Teile gegliedert sein. Zunächst werden wir die Gestalt der Funktion  $g$  untersuchen, gegen die die Lösung der Boltzmann Gleichung für die relativen Fluktuationen im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  geht. Wir werden feststellen, dass  $g$  durch die eigenen, ersten Momente parametrisiert ist.

Im zweiten Schritt werden wir dann zeigen, dass die ersten Momente der Boltzmann Gleichung für die relativen Fluktuationen, beziehungsweise die ersten Momente von  $g$ , die lokalen, beziehungsweise globalen, Erhaltungssätze erfüllen.

Im dritten Teil wollen wir dann kurz begründen, warum es gerechtfertigt ist in den ersten beiden Beweisschritten jeweils Konvergenz vorauszusetzen.

**5.1 Schritt 1: Asymptotische Fluktuationen**

Betrachten wir den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  so geht Gleichung (17) über in  $\mathcal{L}g = 0$ , falls  $g_\epsilon \rightarrow g$  konvergiert. Wir werden jetzt den linearen Stoßoperator, insbesondere dessen Kern, genauer untersuchen, um die Struktur von  $g$  besser zu verstehen.

**5.4 Lemma** (Linearer Stoßoperator, D. Hilbert [9])

*Der Operator  $\mathcal{L}$  ist ein nicht negativer, selbstadjungierter, unbeschränkter Fredholm-Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^3; Mdv)$  mit*

$$\ker \mathcal{L} = \text{span}\{1, v_1, v_2, v_3, |v|^2\}, \tag{19}$$

wobei  $v = (v_1, v_2, v_3)^T$  ist.

Wir wollen hier auf den Beweis der Unbeschränktheit und der Fredholm Eigenschaft verzichten, diese können in [7] nachgeschlagen werden. Dort ist auch der Beweis von F. Golse, an dem wir uns hier orientieren wollen, nach zu lesen.

**Beweis:**

Um den Kern von  $\mathcal{L}$  zu bestimmen, schaut man sich die Definition

$$\mathcal{L}\phi := \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} M_*(\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*)|v - v_*| dv_* d\sigma$$

an, so sehen wir, dass gilt:  $\mathcal{L}(g_\epsilon) = 0 \Leftrightarrow (g_\epsilon + g_{\epsilon*} - g'_\epsilon - g'_{\epsilon*}) = 0$  fast überall. Diese Bedingung erfüllt die Einsfunktion offensichtlich und für  $v_1, v_2, v_3$  und  $|v|^2$  folgt dieses mit Proposition (4.3).

Um Selbstadjungiertheit zu zeigen betrachten wir das Skalarprodukt

$$(\psi, \mathcal{L}\phi)_{L^2} = \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} \psi M_*(\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*)|v - v_*| dv_* d\sigma dv$$

und führen Variablentäusche analog zu dem Beweis von Proposition (4.4) durch:

$$\begin{aligned}
 (\psi, \mathcal{L}\phi)_{L^2} &= \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (\psi + \psi_* - \psi' - \psi'_*) M_*(\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*) |v - v_*| dv_* d\sigma dv \\
 &= \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (\psi + \psi_* - \psi' - \psi'_*) M_* \phi |v - v_*| dv_* d\sigma dv \\
 &= (\mathcal{L}\psi, \phi)_{L^2}
 \end{aligned}$$

Mit den selben Argumenten beweisen wir die Nichtnegativität:

$$(\phi, \mathcal{L}\phi)_{L^2} = \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} M_*(\phi + \phi_* - \phi' - \phi'_*)^2 |v - v_*| dv_* d\sigma dv \geq 0$$

□

Da die Funktion  $g$  im Kern von  $\mathcal{L}$  liegt, können wir sie als Linearkombination der Funktionen, die den Kern aufspannen, schreiben:

$$g(t, x, v) = \alpha(t, x) + \beta_1(t, x)v_1 + \beta_2(t, x)v_2 + \beta_3(t, x)v_3 + \gamma(t, x)|v|^2$$

Wählen wir  $\alpha = \rho - \frac{3}{2}\theta$ ,  $\beta_i = u_i$  für  $i = 1, 2, 3$  und  $\gamma = \frac{1}{2}\theta$  so erhalten wir:

$$g(t, x, v) = \rho(t, x) + u(t, x) \cdot v + \frac{1}{2}\theta(t, x)(|v|^2 - 3) \tag{20}$$

Die Bezeichnungen für die Parameter sind so gewählt, dass sie am Ende mit den Bezeichnungen in der Navier-Stokes Gleichung übereinstimmen, also  $\rho$  die Massendichte und  $u$  das Geschwindigkeitsfeld bezeichnen.

### 5.5 Notation

Für eine Funktion  $\phi$  bedeutet die Klammernotation:

$$\langle \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \phi(v) M dv$$

### 5.6 Proposition (F. Golse [6])

Die Funktion  $g$  ist durch die eigenen Momente parametrisiert, also  $\rho = \langle g \rangle$ ,  $u = \langle vg \rangle$  und  $\theta = \langle (\frac{1}{3}|v|^2 - 1)g \rangle$ .

#### Beweis:

Die Behauptung folgt durch einfaches Nachrechnen. Wir wollen das hier nur für das erste

Moment vorrechnen.

$$\begin{aligned}
 \langle g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} (\rho(t, x) + u(t, x) \cdot v + \frac{1}{2}\theta(t, x)(|v|^2 - 3)) M dv \\
 &= \rho(t, x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} M dv}_{=1} + \sum_{i=1}^3 u_i(t, x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} v_i M dv}_{=0} + \frac{1}{2}\theta(t, x) \left( \sum_{i=1}^3 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} v_i^2 M dv}_{=1} - 3 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} M dv}_{=1} \right) \\
 &= \rho + 0 + 0 = \rho
 \end{aligned}$$

□

## 5.2 Schritt 2: Lokale Erhaltungssätze

Wir wollen nun zeigen, dass die Parameter  $\rho(t, x)$  und  $u(t, x)$  von  $g$  die Kontinuitäts-(1) und die Impulserhaltungsgleichung (2) erfüllen. Dazu rufen wir uns Gleichung (18) in Erinnerung:

$$\epsilon^3 M \partial_t g_\epsilon + \epsilon^2 M v \cdot \nabla_x g_\epsilon = \mathcal{C}(g_\epsilon \epsilon M + M)$$

Durch integrieren, beziehungsweise durch multiplizieren mit  $v$  und integrieren erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^3 M \partial_t g_\epsilon dv + \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^2 M v \cdot \nabla_x g_\epsilon dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(g_\epsilon \epsilon M + M) dv \quad (21)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^3 M v \partial_t g_\epsilon dv + \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^2 M v (v \cdot \nabla_x g_\epsilon) dv = \int_{\mathbb{R}^3} v \mathcal{C}(g_\epsilon \epsilon M + M) dv \quad (22)$$

Schauen wir uns zunächst deren rechten Seiten genauer an.

### 5.7 Proposition (F. Golse [7])

Für alle messbaren Funktionen  $\phi \equiv \phi(v)$  die für  $|v| \rightarrow \infty$  schnell klein werden, gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(\phi) dv &= 0 \\
 \int_{\mathbb{R}^3} v_i \mathcal{C}(\phi) dv &= 0 \quad i = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

**Beweis:** Mit Proposition (4.4) gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{C}(\phi) dv &= \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (\phi' \phi'_* - \phi \phi_*) (1 + 1 - 1 - 1) |v - v_*| dv dv_* d\sigma = 0 \\
 \int_{\mathbb{R}^3} v_i \mathcal{C}(\phi) dv &= \frac{1}{4} \iiint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2} (\phi' \phi'_* - \phi \phi_*) \underbrace{(v_i + v_{*i} - v'_i - v'_{*i})}_{=0 \text{ nach (4.3)}} |v - v_*| dv dv_* d\sigma = 0 \quad \square
 \end{aligned}$$



Betrachten wir zunächst Gleichung (21). Mit Proposition (5.7) vereinfacht sich diese zu

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^3 M \partial_t g_\epsilon dv + \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^2 M v \cdot \nabla_x g_\epsilon dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \epsilon \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} M g_\epsilon dv + \int_{\mathbb{R}^3} M \nabla_x \cdot (v g_\epsilon) dv = 0 \quad . \end{aligned}$$

Für  $\epsilon \rightarrow 0$  erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} M \nabla_x \cdot (v g) dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^3} M (v g) dv = 0 \\ \stackrel{Prop.(5.6)}{\Leftrightarrow} & \quad \nabla_x \cdot u = 0 \end{aligned}$$

Das entspricht genau der Inkompressibilitätsbedingung der Navier-Stokes Gleichung. Betrachten wir jetzt die Gleichung (22), so vereinfacht sich diese mit Proposition (5.7) zu

$$\int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^3 M v \partial_t g_\epsilon dv + \int_{\mathbb{R}^3} \epsilon^2 M v (v \cdot \nabla_x) g_\epsilon dv = 0 \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} M v g_\epsilon dv + \int_{\mathbb{R}^3} M \frac{1}{\epsilon} \nabla_x \cdot (v \otimes v) g_\epsilon dv = 0 \quad . \quad (24)$$

Bilden wir auch hier den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$ , so geht der erste Summand über in

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} M v g_\epsilon dv \stackrel{Prop.(5.6)}{=} \partial_t u \quad ,$$

genauso, wie wir es für die Impulserhaltungsgleichung (2) benötigen. Die Grenzwertbildung im zweiten Summanden ist etwas komplizierter, da dieser den Faktor  $\frac{1}{\epsilon}$  enthält. Wir werden sehen, dass wir den Term so umformen können, dass dieser Faktor wegfällt. Dafür wird allerdings ein Term auftreten, in dem  $g_\epsilon$  quadratisch eingeht.

Dazu zerlegen wir die Matrix  $v \otimes v$  in eine spurfreie Matrix  $A(v) = (v \otimes v) - \frac{1}{3}|v|^2 I$  und einen Rest. So wird der zweite Summand zu

$$\nabla_x \cdot \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^3} M (A(v) + \frac{1}{3}|v|^2 I) g_\epsilon dv = \frac{1}{\epsilon} \nabla_x \cdot \langle A(v) g_\epsilon \rangle + \frac{1}{\epsilon} \nabla_x \cdot \langle \frac{1}{3}|v|^2 g_\epsilon \rangle \quad (25)$$

**5.8 Proposition**

Sei  $A(v) := (v \otimes v) - \frac{1}{3}|v|^2 I$  und  $\ker \mathcal{L} = \text{span}\{1, v_1, v_2, v_3, |v|^2\}$ , dann gilt

$$A(v) \perp \ker \mathcal{L}$$

bezüglich des Skalarprodukts  $(\phi, \psi) = \int \phi \psi M dv = \langle \phi \psi \rangle$ .

**Beweis:**

Es ist leicht nachzurechnen, dass das Skalarprodukt jeder Komponente der Matrix mit jedem Basiselementen des Kerns gleich Null ist.  $\square$

Nach Proposition (5.4) ist  $\mathcal{L}$  ein Fredholm-Operator. Das heißt, dass die Gleichung  $\mathcal{L}\phi = \psi$  eine Lösung  $\phi = \phi_0 + \phi_1$  hat, falls  $\psi \perp \ker \mathcal{L}$ . Dabei ist  $\phi_0 \in L_2(a^2 M dv) \cap (\ker \mathcal{L})^\perp$  eindeutig und  $\phi_1$  ein beliebiges Element aus  $\ker \mathcal{L}$ . Mit Proposition (5.8) existiert also genau ein Matrixfeld  $\hat{A}$  im Definitionsbereich von  $\mathcal{L}$  mit

$$\mathcal{L}\hat{A} = A \quad \text{mit } \hat{A} \perp \ker \mathcal{L}$$

Benutzen wir zusätzlich die Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{L}$ , diese gilt nach Proposition (5.4), erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \langle A g_\epsilon \rangle &\stackrel{\text{Fredholm}}{=} \frac{1}{\epsilon} \langle \mathcal{L} \hat{A} g_\epsilon \rangle \stackrel{\text{selbstadj.}}{=} \left\langle \hat{A} \frac{1}{\epsilon} \mathcal{L} g_\epsilon \right\rangle \\ &\stackrel{\text{Gl. (17)}}{=} \langle \hat{A} \mathcal{Q}(g_\epsilon, g_\epsilon) \rangle - \langle \hat{A}(\epsilon \partial_t + v \cdot \nabla_x) g_\epsilon \rangle \end{aligned} \quad (26)$$

Sei nun  $\Pi$  die orthogonale Projektion auf  $\ker \mathcal{L}$  in  $L_2(\mathbb{R}^3; M dv)$ , dann gilt für alle  $\phi \in L_2(\mathbb{R}^3; M dv)$ :

$$\Pi \phi = \langle \phi \rangle + v \cdot \langle v \phi \rangle + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3) \left\langle \left( \frac{1}{3} |v|^2 - 1 \right) \phi \right\rangle. \quad (27)$$

Aufgrund des 1. Schrittes des Beweises (5.1) erwarten wir, dass auf der rechten Seite von Gleichung (26)  $g_\epsilon$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  durch  $\Pi g_\epsilon$  ersetzt werden kann, also

$$\frac{1}{\epsilon} \langle A g_\epsilon \rangle = \langle \hat{A} \mathcal{Q}(\Pi g_\epsilon, \Pi g_\epsilon) \rangle - \langle \hat{A}(v \cdot \nabla_x) \Pi g_\epsilon \rangle. \quad (28)$$

Setzen wir in den zweiten Term der rechten Seite für  $\Pi g_\epsilon$  ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} v \cdot \nabla_x \Pi g_\epsilon \rangle &= \left\langle \hat{A} \sum_{k=1}^3 v_k \partial_{x_k} \Pi g_\epsilon \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{A} \sum_{k=1}^3 v_k \partial_{x_k} \left( \langle g_\epsilon \rangle + v \cdot \langle v g_\epsilon \rangle + \frac{1}{2}(|v|^2 - 3) \left\langle \left( \frac{1}{3} |v|^2 - 1 \right) g_\epsilon \right\rangle \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \hat{A} \sum_{k=1}^3 v_k \right\rangle \partial_{x_k} \langle g_\epsilon \rangle + \left\langle \hat{A} \sum_{k=1}^3 v_k \partial_{x_k} \sum_{l=1}^3 v_l \right\rangle \langle v_m g_\epsilon \rangle \\ &\quad + \left\langle \hat{A} \sum_{k=1}^3 v_k \frac{1}{2}(|v|^2 - 3) \right\rangle \partial_{x_k} \left\langle \left( \frac{1}{3} |v|^2 - 1 \right) g_\epsilon \right\rangle. \end{aligned}$$

Hier ist der erste Term gleich Null, da  $\hat{A} \perp \ker \mathcal{L}$  ist. Den dritten Term wollen wir hier nicht weiter beachten, da er als Teil des Druckgradienten aufgefasst werden kann und wir im Sinne von Gleichung (7) modulo Gradienten Felder rechnen können. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \hat{A}v \cdot \nabla_x \Pi g_\epsilon \rangle &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \langle \hat{A}v_k v_l \rangle \partial_{x_k} \langle v_l g_\epsilon \rangle = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \langle \hat{A}a_{kl} + \underbrace{\hat{A}|v|^2}_{=0 \text{ da } \hat{A} \perp \ker \mathcal{L}} \rangle \partial_{x_k} \langle v_l g_\epsilon \rangle \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \langle \hat{A}a_{kl} \rangle \partial_{x_k} \langle v_l g_\epsilon \rangle = \langle \hat{A} \otimes A \rangle : \nabla_x \langle v g_\epsilon \rangle. \end{aligned}$$

Dabei ist  $(\langle \hat{A} \otimes A \rangle : \nabla_x \langle v g_\epsilon \rangle)_{ij} = \text{spur}(\langle \hat{a}_{ij} A \rangle \langle \nabla_x g_\epsilon \rangle) = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \langle \hat{a}_{ij} a_{kl} \rangle \partial_{x_k} \langle v_l g_\epsilon \rangle$ . Wenn wir dieses Ergebnis in Gleichung (28) einsetzen, erhalten wir

$$\frac{1}{\epsilon} \langle A g_\epsilon \rangle = \langle \hat{A} \mathcal{Q}(\Pi g_\epsilon, \Pi g_\epsilon) \rangle - \langle \hat{A} \otimes A \rangle : \nabla_x \langle v g_\epsilon \rangle. \quad (29)$$

Um den Term mit dem quadratischen Stoßoperator zu vereinfachen, benötigen wir noch folgendes Lemma.

**5.9 Lemma** (F. Golse [6])

Für alle  $g \in \ker \mathcal{L}$  gilt

$$\mathcal{Q}(g, g) = \frac{1}{2} \mathcal{L}g^2.$$

**Beweis:**

Der Beweis orientiert sich an [1]. Sei  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{(\rho, u, \theta)}$ . Die Behauptung folgt durch zweimaliges differenzieren der Gleichung  $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = 0$ .

$$\begin{aligned} d\mathcal{M} &= \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial u} du \\ d\mathcal{M} &= \mathcal{M} \left( \frac{1}{\rho} d\rho + (v - u) \cdot du + \left( \frac{|v - u|^2}{2\theta^2} - \frac{3}{2\theta} \right) d\theta \right) \end{aligned}$$

An der Stelle  $(\rho, u, \theta) = (1, 0, 1)$  ergibt sich damit

$$dM = M \left( d\rho + v \cdot du + \left( \frac{|v|^2}{2} - \frac{3}{2} \right) d\theta \right)$$

und analog

$$\begin{aligned} d^2 M &= M \left( d\rho + v \cdot du + \left( \frac{|v|^2}{2} - \frac{3}{2} \right) d\theta \right)^2 \\ &\quad + \left( d\rho^2 + v \cdot du^2 + \left( \frac{|v|^2}{2} - \frac{3}{2} \right) d\theta^2 \right). \end{aligned}$$

Anhand von Gleichung (20) sehen wir, dass für geeignete Parameter  $dM = Mg$  und  $d^2M = Mg^2$  gilt, und damit auch

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\mathcal{C}(M) = D^2\mathcal{C}(M)(dM, dM) + D\mathcal{C}(M)d^2M \\ &= D^2\mathcal{C}(M)(Mg, Mg) + D\mathcal{C}(M)(Mg^2) \\ &= 2\mathcal{Q}(g, g) - \mathcal{L}g^2, \end{aligned}$$

mit den Definitionen für  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{L}$  aus Bemerkung (5.3).  $\square$

Mit Lemma (5.9) können wir Gleichung (29) weiter vereinfachen zu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon}\langle Ag_\epsilon \rangle &= \langle \hat{A}\mathcal{L}(\Pi g_\epsilon)^2 \rangle - \langle \hat{A} \otimes A \rangle : \nabla_x \langle vg_\epsilon \rangle \\ &\stackrel{\text{selbstadj.}}{=} \langle (\mathcal{L}\hat{A})(\Pi g_\epsilon)^2 \rangle - \langle \hat{A} \otimes A \rangle : \nabla_x \langle vg_\epsilon \rangle \\ &\stackrel{\mathcal{L}\hat{A}=A}{=} \langle A(\Pi g_\epsilon)^2 \rangle - \langle \hat{A} \otimes A \rangle : \nabla_x \langle vg_\epsilon \rangle \\ &\stackrel{\text{Gl.(27)}}{=} \langle vg_\epsilon \rangle \otimes \langle vg_\epsilon \rangle - \frac{1}{3}|\langle vg_\epsilon \rangle|^2 - \nu D(\langle vg_\epsilon \rangle) \end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gleichung (25) ein erhält man mit Gleichung (24)

$$\partial_t \langle vg_\epsilon \rangle + \nabla_x \cdot (\langle vg_\epsilon \rangle \otimes \langle vg_\epsilon \rangle) - \nu \Delta \langle vg_\epsilon \rangle = 0. \quad (30)$$

Im Grenzwert  $\epsilon$  geht gegen Null, erhalten wir dann mit Proposition (5.6) die Impulserhaltungsgleichung. Da das Geschwindigkeitsfeld  $u$  nun sowohl Impulserhaltungs- also auch Kontinuitätsgleichung erfüllt, können wir nach den Kapitel 2 und 3 davon ausgehen, dass für konstante Massendichte  $\rho$  auch die inkompressible Navier-Stokes Gleichung erfüllt ist.

### 5.3 Kompaktheitsargumente

In dem vorherigen Kapitel sind wir davon ausgegangen, dass  $g_\epsilon$  für  $\epsilon \rightarrow 0$  konvergiert. Wir wollen hier kurz begründen, warum das so ist. C. Bardos, F. Golse und C. D. Levermore haben in [2] gezeigt, dass  $(1 + |v|^2)g_\epsilon$  schwach relativ kompakt in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^3; L^1(\mathbb{R}_v^3))$  liegt. Weiterhin ist durch die Entropie-Ungleichung (15) eine a priori Abschätzung für die Teilchendichtefluktuationen gegeben, die gleich sind in  $\epsilon$ . Daher gilt für alle  $\phi(v) = \mathcal{O}(|v|^2)$  für  $|v| \rightarrow +\infty$

$$\phi g_\epsilon \rightharpoonup \phi g \quad \text{schwach in } L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_x^3; L^1(\mathbb{R}_v^3)).$$

Das rechtfertigt, dass wir den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  in allen Termen, die linear in  $g_\epsilon$  sind, bilden dürfen. Um dies für die nichtlinearen Terme zu zeigen benötigen wir punktweise statt schwache Konvergenz.

#### 5.10 Lemma (F. Golse, L. Saint-Raymond [8])

Sei  $f_n \equiv f(x, v)$  eine beschränkte Folge von Funktionen  $L^1(\mathbb{R}^D; L^p(\mathbb{R}^D))$  für ein  $p > 1$ , so dass die Folge  $v \cdot \nabla_x f_n$  beschränkt ist in  $L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$ . Dann gilt:

- Die Folge  $f_n$  ist schwach relativ kompakt in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$
- Für alle  $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^D)$  ist die Folge von Momenten  $\int_{\mathbb{R}^D} f_n(x, v)\Phi(v) dv$  stark relativ kompakt in  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^D)$

Mit diesem Lemma können wir fast überall punktweise Konvergenz zeigen. Zunächst nutzen wir aus, dass wir auf Grund der Entropie-Ungleichung (15) die Entropie-Produktionsrate abschätzen können. Diese Abschätzung impliziert dann, dass  $g_\epsilon$  sich der Mannigfaltigkeit der infinitesimalen Maxwellverteilungen nähert. Das heißt, dass  $g_\epsilon$  punktweise gegen Funktionen der Klasse von  $g$  konvergiert. Deshalb dürfen wir auch in Termen wie  $\langle v g_\epsilon \rangle \otimes \langle v g_\epsilon \rangle$  zum Grenzwert übergehen.

### Zusammenfassung

Wir wollten zeigen, dass das erste Moment der Lösung der inkompressiblen Boltzmann Gleichung, bei entsprechender Skalierung, die Navier-Stokes Gleichung erfüllt. Wir haben gesehen, dass die ersten Momente der relativen Fluktuationen, lokal die Erhaltungsgleichungen und im Grenzwert das Navier-Stokes System erfüllen. Es muss noch gezeigt werden, dass das auch der Fall ist, wenn man zu dem Erwartungswert der relativen Fluktuationen additiv den Erwartungswert des Gleichgewichtszustandes hinzufügt. Da wir aber gezeigt haben, dass der Gleichgewichtszustand eine Maxwellverteilung ist, und diese den Erwartungswert Null haben, ist das klar.

## 6 Schwarmverhalten

In diesem Kapitel wollen wir das Verhalten von Tieren in einer Herde als ein Anwendungsbeispiel der Fluid Dynamik diskutieren. Dazu werden wir zunächst ein angemessenes, mikroskopisches Modell aufstellen. Das heißt, wir überlegen uns, wie wir die Wechselwirkung eines beliebigen Tieres mit den übrigen und die daraus resultierende Bewegung mathematisch darstellen können. Danach werden wir von diesem Modell zu einem Kontinuums-Modell übergehen, in dem wir annehmen, dass es in dem System sehr viele Tiere gibt. Für dieses Modell werden wir dann einen Lösungsansatz erarbeiten.

### 6.1 Das Modell

#### 6.1.1 Mikroskopisches Modell

Um ein Modell zu finden, müssen wir zunächst einige Annahmen über die Tiere und deren Verhalten treffen:

- i) Es befindet sich eine gewisse Anzahl an identischen Tieren, mit einer räumlichen Ausdehnung, in einer Ebene. Das heißt, die Tiere können weder über-, unter- noch durcheinander durch laufen.
- ii) Die Tiere sind soziale Tiere, die sich gerne in Herden aufhalten. Deswegen wollen sie immer in die Richtung laufen in der sie möglichst nah an allen anderen Tieren sind.
- iii) Alle Tiere bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Sie können also nur ihre Bewegungsrichtung ändern.

Die dritte Forderung widerspricht hier der Erfahrung. Wenn wir allerdings davon ausgehen, dass wir die Herde in einer Situation beobachten, in der die Tiere keine Pausen machen, fressen oder ähnliches, sondern sich einfach als Herde fortbewegen und die Tiere alle gesund und ähnlich kräftig sind, dann scheint diese Betrachtungsweise nicht mehr so abwegig.

Um unser Modell möglichst einfach zu halten, treffen wir diese Annahme. Mathematisch lassen sich diese Forderungen wie folgt umsetzen:

- i) Wir betrachten  $N$  Scheiben mit dem Radius  $d$  und dem jeweiligem Mittelpunkt  $X_k$ , mit  $k \in 1, \dots, N$ , im  $\mathbb{R}^2$ . Um zu verhindern, dass die Scheiben sich durcheinander durch bewegen können, wirkt eine abstoßende Kraft, die sogenannte Repulsivkraft  $F_k^r$ , mit sehr kurzer Reichweite  $R_r$ . Diese Kraft wird in Richtung und Betrag, maßgeblich durch den Abstand  $\xi_k^r$  zum Massenschwerpunkt aller Tiere im

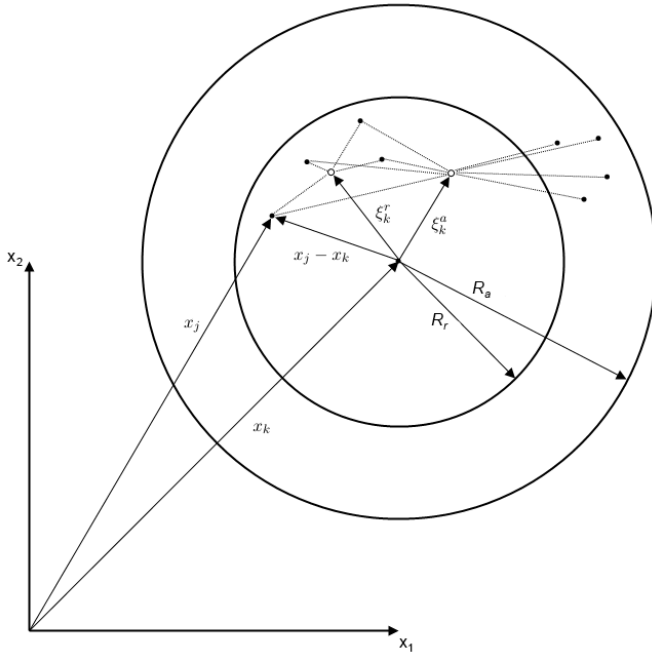


Abbildung 6.1: Modellübersicht

Wirkungsbereich der Kraft, bestimmt. Deshalb setzen wir  $F_k^r = -\alpha_k^r \xi_k^r$ , wobei der Skalierungsfaktor  $\alpha_k^r \equiv \alpha_k^r(\rho)$  abhängig von der Teilchendichte  $\rho_k^r$  ist. Wir fassen die Teilchendichte als das Verhältnis von durch Teilchen überdeckter Fläche des Wirkungsbereichs der Repulsivkraft  $F_k^r$  zu deren gesamten Wirkungsbereich auf, also

$$\rho_k^r = \frac{\pi d^2 \sum_{j \in J} 1}{\pi R_r^2} \quad J := \{j \mid |X_j - X_k| \leq R_r\}$$

- ii) Es wirkt eine Anziehungskraft  $F_k^a$  mit sehr großer Reichweite  $R_a$ . Wir modellieren diese Kraft analog zur Repulsivkraft  $F_k^a = \xi_k^a \alpha_k^a$ . Der Skalierungsfaktor  $\alpha_k^a = \alpha_a$  soll hier konstant bleiben.
- iii) Jeder Scheibe  $k$  wird eine Bewegungsrichtung  $\omega_k \in \mathbb{S}^1$  zugeordnet. Da die Geschwindigkeit  $v_k = |v_k| \omega_k$  betraglich konstant bleibt, können wir  $|v_k| = 1$  setzen.

Nehmen wir an, dass jedes Tier die Masse  $m = 1$  hat, lassen sich die Abstände zu den jeweiligen Massenschwerpunkten wie folgt berechnen:

$$\xi_k^a = \frac{\sum_{j \in J} (X_j - X_k)}{\sum_{j \in J} 1} \quad J := \{j \mid |X_j - X_k| \leq R_a\}$$

$$\xi_k^r = \frac{\sum_{j \in J} (X_j - X_k)}{\sum_{j \in J} 1} \quad J := \{j \mid |X_j - X_k| \leq R_r\}$$

Die Bezeichnungen finden sich alle übersichtlich in der Abbildung (6.1) wieder. Mit diesen Annahmen erhalten wir die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}\frac{dX_k}{dt} &= c v_k \\ \frac{d^2 X_k}{dt^2} &= \frac{dv_k}{dt} = (I - v_k \otimes v_k)(F_k^a - F_k^r),\end{aligned}$$

wobei der Term  $(I - v_k \otimes v_k)$  die Kraft in die orthogonale Ebene zu  $v$  projiziert und damit sicher stellt, dass die Kraft nur die Richtung, nicht aber den Betrag, von  $v$  ändert.

### 6.1.2 Mesoskopisches Modell

Um von diesem mikroskopischen Modell zu einem mesoskopischen zu gelangen, gehen wir ähnlich wie bei der Herleitung der Boltzmann Gleichung vor. Zunächst müssen wir uns überlegen wie sich das System für sehr große Teilchenzahlen verhält. Betrachtet man einen festes, räumliches Gebiet, das mit  $N$  Teilchen komplett ausgefüllt ist, und  $N \rightarrow \infty$ , so geht der Bereich, den jedes einzelne Teilchen überdeckt gegen Null.

Wir wollen die Verteilungsfunktion  $f^N$  betrachten, die im Phasenraum wie folgt definiert ist:

$$f^N(x, v, t) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(x - X_k(t)) \delta(v, v_k(t)),$$

wobei  $\delta(x)$  die Delta-Distribution auf  $\mathbb{R}^2$  und  $\delta(v, v_0)$  die Delta-Distribution auf  $\mathbb{S}^1$  bezeichnet, die um  $v_0$  zentriert ist. Die so definierte Verteilung ordnet jedem Punkt im Phasenraum, der den Zustand eines Teilchens beschreibt, den Wert  $\frac{1}{N}$  zu. Sie erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\partial_t f^N + c v \cdot \nabla_x f^N + \nabla_v \cdot ((F_a^N - F_r^N) f^N) = 0.$$

Bilden wir hier den Grenzwert  $N \rightarrow \infty$ , kann man zeigen, dass

$$\partial_t f + c v \cdot \nabla_x f = -\nabla_v \cdot ((F_a - F_r) f) \tag{31}$$

gilt. Dabei sind  $F_a = \xi_a(I - v \otimes v)\alpha_a$  und  $F_r = \xi_r(I - v \otimes v)\alpha_r$  mit Kontinuumsformulierungen für die Schwerpunkte  $\xi$  und die Skalierungsfunktionen  $\alpha$  für die Intensität, das



heißt:

$$\begin{aligned}\xi_a(t, x, v) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_a(y-x)(y-x)\rho(t, y)dy}{\int_{\mathbb{R}^2} K_a(y-x)\rho(t, y)dy} \\ \xi_r(t, x, v) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(y-x)(y-x)\rho(t, y)dy}{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(y-x)\rho(t, y)dy} \\ \alpha_a &\equiv \alpha_a \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_a(y-x)\rho(t, y)dy}{\beta \int_{\mathbb{R}^2} K_a(y-x)dy} \right) \\ \alpha_r &\equiv \alpha_r \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(y-x)\rho(t, y)dy}{\beta \int_{\mathbb{R}^2} K_r(y-x)dy} \right).\end{aligned}$$

Dabei sind die positiven Interaktions-Kerne  $K_a$  und  $K_r$ , im leichtesten Fall jeweils die Indikatorfunktion auf dem entsprechenden Gebiet, und die Dichte  $\rho$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}K_a(x) &= \mathbb{1}_{\{|x| \leq R_a\}}(x) & K_r(x) &= \mathbb{1}_{\{|x| \leq R_r\}}(x) \\ \rho(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv.\end{aligned}$$

Die Gleichung (31) ähnelt stark der Boltzmann Gleichung (9), allerdings mit einer angepassten, nicht konservativen, rechten Seite. Dieser Unterschied wird von dem Projektionsterm, den wir in dem mikroskopischen Modell in der zweiten Ortsableitung berücksichtigen mussten, verursacht.

Die Gültigkeit der Gleichung (31) wollen wir nicht zeigen, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde. Führen wir für diese Gleichung neue Orts- und Zeitskalen ein, können wir das Modell noch etwas vereinfachen. Wir setzen  $\tilde{x} := \frac{x}{x_0}$  und  $\tilde{t} := \frac{t}{t_0}$  mit  $t_0 := \frac{x_0}{c}$  als neue Orts- beziehungsweise Zeitvariablen, sowie die skalierten Intensitäten  $\tilde{\alpha}_a := \frac{x_0^2}{c} \alpha_a$  und  $\tilde{\alpha}_r := \frac{x_0^2}{c} \alpha_r$  und die skalierte Verteilungsfunktion  $\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) = \beta f(t, x, v)$ . Durch die Ortsskalierung, ändern sich auch die Reichweiten der Kräfte, so dass wir  $\tilde{R}_a = \frac{R_a}{x_0}$  und  $\tilde{R}_r = \frac{R_r}{x_0}$  erhalten.

Wir wollen die folgenden Überlegungen ohne die Indizes  $a$  und  $r$  anstellen, da die

Rechnungen für beide analog sind. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_t &= \partial_{\tilde{t}} \frac{c}{x_0} \\
 \nabla_x &= \nabla_{\tilde{x}} \frac{1}{x_0} \\
 \tilde{K}(\tilde{x}) &= \mathbb{1}_{\{|\tilde{x}| \leq \tilde{R}\}}(\tilde{x}) = \mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{x}{x_0}\right| \leq \frac{R}{x_0}\right\}}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \mathbb{1}_{\{|x| \leq R\}}\left(\frac{x}{x_0}\right) = K(x) \\
 \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(t, x, v) dv = \int_{\mathbb{R}^2} \beta f(t, x, v) dv = \beta \rho(t, x) \\
 \tilde{\alpha} &\equiv \tilde{\alpha} \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(\tilde{y} - \tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\beta \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(\tilde{y} - \tilde{x}) d\tilde{y}} \right) = \frac{x_0^2}{c} \alpha \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) \beta \rho(t, y) \frac{1}{x_0} dy}{\beta \int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) \frac{1}{x_0} dy} \right) \\
 &= \frac{x_0^2}{c} \alpha \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) \rho(t, y) dy}{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) dy} \right) \equiv \frac{x_0^2}{c} \alpha \quad \text{mit } \beta = 1 \\
 \tilde{\xi}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(\tilde{y} - \tilde{x}) (\tilde{y} - \tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(\tilde{y} - \tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) \left(\frac{y-x}{x_0}\right) \beta \rho(t, y) \frac{1}{x_0} dy}{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) \beta \rho(t, y) \frac{1}{x_0} dy} \\
 &= \frac{1}{x_0} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) (y - x) \rho(t, y) dy}{\int_{\mathbb{R}^2} K(y - x) \rho(t, y) dy} = \frac{1}{x_0} \xi(t, x, v) \\
 \tilde{F}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) &= \tilde{\alpha} (I - v \otimes v) \tilde{\xi}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) = \frac{x_0}{c} \alpha (I - v \otimes v) \xi(t, x, v) = \frac{x_0}{c} F(t, x, v).
 \end{aligned}$$

Setzen wir dies in Gleichung (31) ein, erhalten wir die skalierte Gleichung:

$$\frac{c}{x_0} \partial_{\tilde{t}} \frac{1}{\beta} \tilde{f} + c v \cdot \frac{1}{x_0} \nabla_{\tilde{x}} \frac{1}{\beta} \tilde{f} = -\nabla_v \cdot \left( \left( \frac{c}{x_0} \tilde{F}_a - \frac{c}{x_0} \tilde{F}_r \right) \frac{1}{\beta} \tilde{f} \right).$$

Nach Multiplikation mit  $\frac{\beta x_0}{c}$  und Umbenennung,  $\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{x} = x$  und so weiter, erhalten wir:

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = -\nabla_v \cdot ((F_a - F_r) f). \quad (32)$$

Das ist im Prinzip dieselbe Gleichung wie (31), nur dass wir hier  $c = 1$  und  $\beta = 1$  haben. Diese Gleichung skalieren wir nun erneut. Hier setzen wir die neuen Koordinaten  $\tilde{t} := \eta t$ ,  $\tilde{x} := \eta x$  und die Verteilungsfunktion  $\tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) := f(t, x, v)$ . Die neue Verteilung genügt dann der folgenden Gleichung:

$$\eta (\partial_{\tilde{t}} \tilde{f} + v \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f}) + \nabla_v ((\tilde{F}_a - \tilde{F}_r) \tilde{f}) = 0, \quad (33)$$

wobei die Kräfte, Schwerpunkte und Intensitäten in den neuen Koordinaten, ohne Beachtung der Indizes, wie folgt definiert sind

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) &:= \tilde{\alpha}(I - v \otimes v) \tilde{\xi}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) \\
 \tilde{\xi}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) &:= \frac{1}{\eta} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K} \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) (\tilde{y} - \tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K} \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}} \\
 \tilde{\alpha} &:= \tilde{\alpha} \left( \frac{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K} \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K} \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) d\tilde{y}} \right) \\
 \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) &:= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(t, x, v) dv,
 \end{aligned}$$

mit den skalierten Interaktions-Kernen  $\tilde{K}_a$  beziehungsweise  $\tilde{K}_r$ .

Nun wollen wir die Skalierung der Repulsiv- und der Anziehungskraft genauer betrachten. Zunächst nehmen wir an, dass die Reichweite der Repulsivkraft von der Ordnung von  $\eta$  ist, das heißt, dass der Interaktions-Kern und die Intensität der abstoßenden Kraft in den neuen Koordinaten gleich bleiben. Wir nehmen also an, dass  $\tilde{K}_r = K_r$  und  $\tilde{\alpha}_r(\rho) = \alpha_r(\rho)$  gilt.

Außerdem nehmen wir an, dass die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen nur vom Abstand abhängt, nicht aber von der Richtung. Das bedeutet, wir wählen einen isotropen Interaktions-Kern  $K_r(x) \equiv K_r(|x|)$ . Um den Grenzwert für sehr kleine  $\eta$  zu untersuchen, benötigen wir noch folgendes Resultat.

**6.1 Proposition** (P. Degond, L. Navoret, R. Bon, D. Sanchez [4])

Sei  $K \equiv K(|z|)$ , dann gelten, unter entsprechenden Regularitätsbedingungen an  $\tilde{\rho}$ , folgende Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y} &= a\tilde{\rho}(\tilde{x}) + \mathcal{O}(\eta) \\
 \tilde{\xi}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) &= \eta \frac{B \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{x})}{a\tilde{\rho}(\tilde{x})} + \mathcal{O}(\eta) \\
 \tilde{\alpha}_r \left( \frac{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) d\tilde{y}} \right) &= \tilde{\alpha}_r(\tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x})) + \mathcal{O}(1),
 \end{aligned}$$

mit  $a = \int K_r(|z|) dz$  und  $B = \int K_r(|z|) z \otimes z dz$ , wobei  $z \in \mathbb{R}^2$ .

Beweis:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y} \\
 & \stackrel{\tilde{y} = \tilde{x} + \eta z}{=} \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x} + \eta z) \eta dz \\
 & \stackrel{\text{Taylor}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz + \eta \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz + \dots \\
 & = a \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) + \mathcal{O}(\eta) \\
 \\
 \tilde{\xi}(\tilde{t}, \tilde{x}, v) & = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) (\tilde{y} - \tilde{x}) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\eta \int_{\mathbb{R}^2} K_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}} \\
 & \stackrel{\tilde{y} = \tilde{x} + \eta z}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \eta z \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x} + \eta z) \eta dz}{\eta \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x} + \eta z) \eta dz} \\
 & \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz}{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz} + \eta \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) (z \otimes z) \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz}{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz} \\
 & \quad - \eta \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz}{\left( \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz \right)^2} + \dots \\
 & \stackrel{=0 \text{ da } K(|z|) \text{ gerade}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z dz}{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) dz} + \eta \frac{B \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x})}{a \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x})} \\
 & \quad - \eta \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z dz \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) z \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz}{\left( \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz \right)^2} + \dots \\
 & = \eta \frac{B \nabla_{\tilde{x}} \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x})}{a \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x})} + \mathcal{O}(\eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\alpha}_r \left( \frac{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{y}) d\tilde{y}}{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}_r \left( \frac{\tilde{y} - \tilde{x}}{\eta} \right) d\tilde{y}} \right) \\
 & \stackrel{\tilde{y} = \tilde{x} + \eta z}{=} \tilde{\alpha}_r \left( \frac{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x} + \eta z) \eta dz}{\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \eta dz} \right) \\
 & \stackrel{\text{Taylor}}{=} \tilde{\alpha}_r \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) \tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x}) dz}{\int_{\mathbb{R}^2} K_r(z) dz} \right) + \dots \\
 & = \tilde{\alpha}_r(\tilde{\rho}(\tilde{t}, \tilde{x})) + \mathcal{O}(1)
 \end{aligned}$$

□

Im einfachsten Fall wählen wir hier wieder  $K_r(z)$  als Indikatorfunktion, dann ist  $a = \pi R_r^2$  und  $B = \pi \frac{R_r^4}{4} I$ .

Weiterhin werden wir annehmen, dass die Anziehungskraft nicht-lokal bleibt, also ihre Reichweite nicht gegen Null geht, wenn  $\eta$  gegen Null geht und dass sie schwächer ist als die abstoßende Kraft. Diese Hypothese realisieren wir, in dem wir  $\tilde{K}_a(\tilde{z}) = K_a(\eta\tilde{z})$  und  $\tilde{\alpha}_a = \eta^2$  setzen.

Mit diesen Annahmen erhalten wir aus Gleichung (33) nach Dividieren durch  $\eta$  folgende Gleichung:

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{f} + v \cdot \nabla_{\tilde{x}} \tilde{f} + \nabla_v \left( (\eta \tilde{\xi}_a - \frac{1}{\eta} \tilde{\alpha}_r \tilde{\xi}_r) (I - v \otimes v) \tilde{f} \right) = 0.$$

Im Folgenden lassen wir die Tilden wieder wegfallen. Mit Proposition (6.1) folgt für den Grenzwert  $\eta \rightarrow 0$ :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \left( (F_a - F_r) f \right) = 0, \tag{34}$$

mit

$$\begin{aligned}
 F_a(t, x, v) &= (I - v \otimes v) \xi_a \\
 F_r(t, x, v) &= \alpha_r(\rho) (I - v \otimes v) \xi_r \\
 \xi_a(t, x) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^2} K_a(|\tilde{y} - \tilde{x}|) (y - x) \rho(t, y) dy}{\int_{\mathbb{R}^2} K_a(|y - x|) \rho(t, y) dy} \\
 \xi_r(t, x) &= \frac{B \nabla_x \rho(t, x)}{a \rho(t, x)}.
 \end{aligned}$$

Zusätzlich werden wir die Ortsskala so wählen, dass  $\frac{B}{a} = 1$  gilt. In dem Fall, dass wir  $K_r$  als Indikatorfunktion wählen, heißt das, dass wir  $x_0 = \frac{R_r}{2}$  setzen. Also betrachten

wir  $\xi_r$  als:

$$\xi_r(t, x) = \frac{\nabla_x \rho(t, x)}{\rho(t, x)}. \quad (35)$$

### 6.1.3 Makroskopisches Modell

Die Gleichung (34) ist sehr ähnlich zu der Boltzmann Gleichung (9) aus dem ersten Teil der Arbeit. Wir haben bereits gesehen, dass wir, falls  $f$  bestimmte Regularitätsbedingungen erfüllt und schnell genug klein wird für  $x \rightarrow \infty$ , zu einer makroskopischen Beschreibungen übergehen können. Das heißt, die Dynamik wird beschrieben durch die Teilchendichte  $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) dv$  und das Geschwindigkeitsfeld  $u(t, x) = \frac{1}{\rho(t, x)} \int_{\mathbb{R}^2} v f(t, x, v) dv$ .

Aus der mesoskopischen Gleichung (34) erhalten wir, durch Integrieren über  $v$ , beziehungsweise durch Multiplizieren mit  $v$  und anschließendem Integrieren, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t f dv + \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla_x f dv + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_v \cdot ((F_a - F_r) f) dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} v f dv + \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^2} ((F_a - F_r) f) dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} v \partial_t f dv + \int_{\mathbb{R}^2} v(v \cdot \nabla_x f) dv + \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla_v \cdot ((F_a - F_r) f) dv = 0 \\ \stackrel{Green}{\Leftrightarrow} & \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} v f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (v \otimes v) f dv - \int_{\mathbb{R}^2} ((F_a - F_r) f) dv = 0. \\ \Leftrightarrow & \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} v f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (v \otimes v) f dv - \int_{\mathbb{R}^2} ((I - v \otimes v) f) dv (\xi_a - \alpha_r \xi_r) = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} (v \otimes v) f dv - \int_{\mathbb{R}^2} ((I - v \otimes v) f) dv (\xi_a - \alpha_r \xi_r) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

wobei  $F_a, F_r, \xi_a, \xi_r$  und  $\alpha_r$  definiert sind wie bei Gleichung (34). Um dieses System abzuschließen, treffen wir eine weitere Annahme. Wir legen fest, dass  $f$  eine monokinetiche Verteilung ist:

$$f(t, x, v) = \rho(t, x) \delta(v, u)$$

Damit erhalten wir aus der Gleichung (37):

$$\begin{aligned} & \partial_t (\rho u) + \nabla_x \cdot ((u \otimes u) \rho(t, x)) = \rho(t, x) (I - u \otimes u) (\xi_a - \alpha_r \xi_r) \\ \stackrel{Kettenregel}{\Leftrightarrow} & \rho \partial_t u + u (\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u)) + \rho \nabla_x \cdot (u \otimes u) = \rho(t, x) (I - u \otimes u) (\xi_a - \alpha_r \xi_r). \end{aligned}$$

Das ist nach teilen durch  $\rho$  und mit Gleichung (36) äquivalent zu:

$$\partial_t u + \nabla_x \cdot (u \otimes u) = (I - u \otimes u)(\xi_a - \alpha_r \xi_r). \quad (38)$$

Nun wollen wir noch die Funktion  $\alpha_r$  für die Intensität der Repulsivkraft passend wählen. Wir hatten bereits die Bedingungen gestellt, dass  $\alpha_r(\rho) \rightarrow \infty$ , wenn die Dichte  $\rho$  gegen die maximalen Dichte  $\rho^*$  geht. Zusätzlich nehmen wir an, dass  $\alpha_r$  sich wie  $\rho^\gamma$  verhält, solange die Dichte noch deutlich kleiner ist als die Maximale. Eine Funktion die diese Bedingungen erfüllt ist zum Beispiel

$$\alpha_r(\rho) = \rho p'(\rho)$$

mit

$$p(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\gamma}.$$

Die Funktion  $p$  kann dabei als Druck aufgefasst werden. Da  $p$  aber nahe der maximalen Dichte gegen Unendlich geht, kann der Term im Sinne der klassischen Gasdynamik auch als Enthalpie aufgefasst werden.

Die Intensität kann natürlich auch anders modelliert werden, aber für alle Funktionen, die die Bedingungen für das asymptotischen Verhalten erfüllen, würden die Ergebnisse ähnlich aussehen. Setzen wir also  $\alpha_r$  so wie oben definiert und die Definition (35) von  $\xi_r$  in Gleichung (38) ein erhalten wir:

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u + (I - u \otimes u)\nabla_x p(\rho) = (I - u \otimes u)\xi_a \quad (39)$$

Unser makroskopisches Modell setzt sich dann aus den Gleichungen (36) und (39) zusammen:

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \quad (40)$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u + (I - u \otimes u)\nabla_x p(\rho) = 0. \quad (41)$$

Dabei sind die Teilchendichte  $\rho \equiv \rho(t, x)$  und das Geschwindigkeitsfeld  $u \equiv u(t, x)$ , mit dem Unterschied zum 1. Teil der Arbeit, dass  $x \in \mathbb{R}^2$ . In dieser Form ist  $u$  bereits normiert, das heißt, es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  und alle  $t > 0$ :

$$|u(t, x)| = 1$$

In diesem Modell wird der Einfachheit halber der Term für die anziehenden Kräfte zwischen weit entfernten Tieren vernachlässigt, der noch in der Bewegungsgleichung (41) addiert werden müsste. Da aber dieser Term keine weiteren Differentialoperatoren enthält, wird dadurch das Problem aus analytischer Sicht nicht verändert. Wir vernachlässigen diesen Term, da wir unseren Fokus auf die Untersuchung der Herden legen. Herden oder auch Cluster, sind die Gebiete, in denen  $\rho \approx \rho^*$  gilt. Dort ist das Verhalten der Repulsivkraft maßgeblich, deswegen werden wir diese genauer untersuchen.

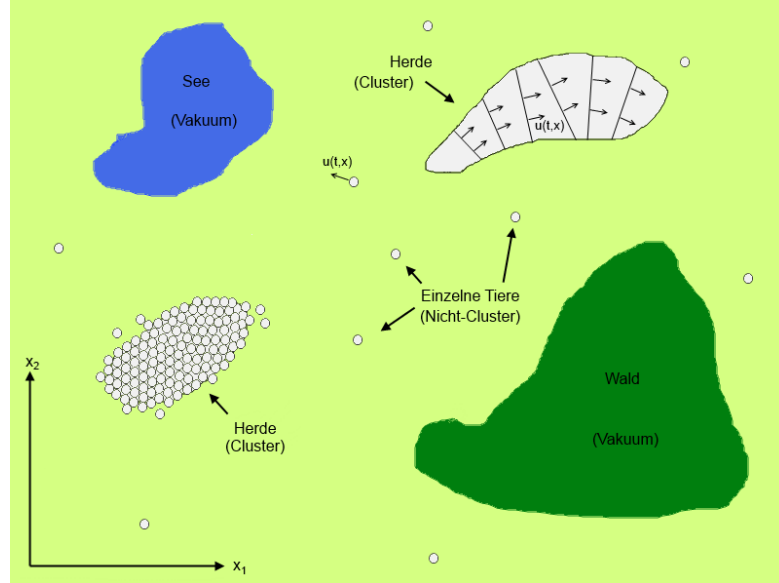


Abbildung 6.2: Modellübersicht

Dazu wollen wir zunächst eine Herde  $H_t$  mathematisch präziser als das Gebiet  $H_t = \{x \in \mathbb{R}^2 | \rho^* - \delta\rho(t, x) < \rho(t, x) < \rho^*\}$  formulieren. So ist die Definition aber noch abhängig von einem beliebigen Parameter  $\delta$ . Wir können das Gebiet schärfer abgrenzen, in dem wir  $p(\rho)$  als  $\epsilon p(\rho_\epsilon)$  reskalieren mit  $\epsilon > 0$ . Das hat den Vorteil, dass der Druckterm sehr klein bleibt, außer in einer sehr kleinen Umgebung  $\rho^*$ . Im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  sollten wir dann eine eindeutige Grenze der Herde festlegen können.

Mit diesen Überlegungen gelangen wir zu dem skalierten Modell

$$\partial_t \rho_\epsilon + \nabla_x \cdot (\rho_\epsilon u_\epsilon) = 0 \quad (42)$$

$$\partial_t u_\epsilon + (u_\epsilon \cdot \nabla_x) u_\epsilon + \epsilon (I - u_\epsilon \otimes u_\epsilon) \nabla_x p(\rho_\epsilon) = 0 \quad (43)$$

$$|u_\epsilon| = 1,$$

welches wir fortan untersuchen werden.

Anschaulich bedeutet dies, dass die Tiere ihre Bewegungsrichtung erst dann ändern, wenn sie aneinander stoßen. Diese Anschauung ist durchaus realistisch, was wir uns vor Augen führen können, in dem wir uns zum Beispiel eine dicht gedrängte Schaaferde vorstellt.

## 6.2 Der singuläre Grenzwert: Übergang zwischen kompressibler und inkompressibler Bewegung

Leider gibt es keine vollständige Theorie, um in dem skalierten Modell formal den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  zu bilden. Wir können uns allerdings überlegen, dass, für  $\epsilon \rightarrow 0$ , der Term  $\epsilon p(\rho_\epsilon)$  nur dann ungleich Null ist, falls  $\rho \rightarrow \rho^*$  schnell genug. Dann gilt auch  $\epsilon p(\rho_\epsilon) \rightarrow \bar{p}$



für ein  $\bar{p} \in \mathbb{R}$ . Die Gleichung  $(\rho^* - \rho)\bar{p} = 0$  erfüllt die Grenzwertbedingungen. Daraus folgt dann für  $\bar{p} < \infty$  weiter, dass

$$(\rho^* - \rho) = \mathcal{O}(\epsilon^{\frac{1}{\gamma}}), \text{ da } \bar{p} = \mathcal{O}(\epsilon^\gamma).$$

Also können wir unser Modell im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  um eine weitere Bedingung ergänzen und erhalten:

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0 \tag{44}$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u + (I - u \otimes u)\nabla_x \bar{p}(\rho) = 0 \tag{45}$$

$$|u| = 1 \tag{46}$$

$$(\rho^* - \rho)\bar{p} = 0. \tag{47}$$

Außerhalb der Herden, in den so genannten Nicht-Clustern, also in den Gebieten, in denen  $\rho < \rho^*$  gilt, muss folglich  $\bar{p} = 0$  sein. Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u = 0$$

$$|u| = 1.$$

Das entspricht, genau dem Modell für kompressible Fluide. Da wir uns aber hier für das Verhalten der Tiere in der Herde interessieren, werden wir dieses Modell nicht weiter untersuchen. Stattdessen werden wir die Herden genauer betrachten. Diese entsprechen auf Modellebene den Gebiete in denen  $\rho = \rho^*$  gilt. Wir erhalten also das Gleichungssystem:

$$\nabla_x \cdot u = 0 \tag{48}$$

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla_x)u + (I - u \otimes u)\nabla_x \bar{p}(\rho) = 0 \tag{49}$$

$$|u| = 1$$

$$\rho^* = \rho.$$

### 6.2 Proposition (P. Degond, L. Navoret, R. Bon, D. Sanchez [4])

Sei  $u \equiv u(x)$  ein Vektorfeld, dass genügend glatt ist auf  $\Theta \in \mathbb{R}^2$  und mit Werten in  $\mathbb{S}^1$ . Es sei weiterhin die Inkompressibilitätsbedingung  $\nabla_x \cdot u = 0$  erfüllt, dann sind die Integralkurven von  $u^\perp$  gerade Linien und  $u$  ist konstant entlang dieser Linien (dabei ist  $u^\perp$  um  $\frac{\pi}{2}$  gedreht). Weiterhin sind die Integalkurven von  $u$  parallel zueinander.

Wir wollen diese Proposition nicht beweisen, aber kurz motivieren. Betrachten wir das Geschwindigkeitsfeld in Polarkoordinaten und berücksichtigt, dass  $|u| = 1$  gilt, so erhalten wir die Darstellung:

$$u(\vartheta(t, x)) = (\cos(\vartheta(t, x)), \sin(\vartheta(t, x))) \tag{50}$$

Setzt man diese Darstellung in die Inkompressibilitätsbedingung (4) ein, erhält man für  $\vartheta$  die Transportgleichung:

$$\partial_{x_2} \vartheta - \tan(\vartheta) \partial_{x_1} \vartheta = 0 \tag{51}$$

Das bedeutet, dass wir die Gleichung überall im Inneren des Gebiets lösen können, sobald wir die Lösung auf dem Rand kennen.

Die Integralkurven können als Stromlinien, beziehungsweise als Trajektorien einzelner Tiere, aufgefasst werden. Das diese Kurven parallel zu einander sind, stimmt mit der intuitiven Vorstellung einer Bewegung in einer Herde überein.

Nehmen wir die Divergenz von Gleichung (49) erhalten wir eine elliptische Differentialgleichung für  $\bar{p}$ :

$$\nabla_x \cdot ((I - u \otimes u) \nabla_x \bar{p}) = -\nabla_x \cdot \partial_t u - \nabla_x \cdot (\nabla_x \cdot (u \otimes u)) \quad (52)$$

Wie können zeigen, dass die rechte Seite Null wird. Für den ersten Term folgt diese Behauptung durch Vertauschen der Ableitungen und Gleichung (48). Für den zweiten Term gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_x \cdot (\nabla_x \cdot (u \otimes u)) &= \partial_{x_1} \left( \partial_{x_1} (u_1^2) + \partial_{x_2} (u_1 u_2) \right) + \partial_{x_2} \left( \partial_{x_1} (u_1 u_2) + \partial_{x_2} (u_2^2) \right) \\ &= \partial_{x_1} \left( u_1 (\partial_{x_1} u_1) + u_1 (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) + (\partial_{x_2} u_1) u_2 \right) \\ &\quad + \partial_{x_2} \left( u_1 (\partial_{x_1} u_2) + u_2 (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) + (\partial_{x_2} u_2) u_2 \right) \\ &\stackrel{Gl.(48)}{=} \partial_{x_1} \left( u_1 (\partial_{x_1} u_1) + (\partial_{x_2} u_1) u_2 \right) + \partial_{x_2} \left( u_1 (\partial_{x_1} u_2) + (\partial_{x_2} u_2) u_2 \right) \\ &= (\partial_{x_1} u_1)^2 + (\partial_{x_2} u_2)^2 + (\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_1) u_2 + 2(\partial_{x_2} u_1)(\partial_{x_1} u_2) \\ &\quad + (\partial_{x_1} \partial_{x_2} u_2) u_1 + u_1 \partial_{x_1}^2 u_1 + u_2 \partial_{x_2}^2 u_2 \\ &= (\partial_{x_1} u_1)^2 + (\partial_{x_2} u_2)^2 + 2(\partial_{x_2} u_1)(\partial_{x_1} u_2) \\ &\quad + u_1 \partial_{x_1} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) + u_2 \partial_{x_2} (\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2) \\ &\stackrel{Gl.(48)}{=} (\partial_{x_1} u_1)^2 + (\partial_{x_2} u_2)^2 + 2(\partial_{x_2} u_1)(\partial_{x_1} u_2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Der letzte Schritt folgt aus der Polarkoordinaten Darstellung von  $u$ :

$$\begin{aligned} (\partial_{x_2} u_1)(\partial_{x_1} u_2) &\stackrel{Gl.(50)}{=} -\sin(\vartheta)(\partial_{x_2} \vartheta) \cos(\vartheta)(\partial_{x_1} \vartheta) \\ &\stackrel{Gl.(51)}{=} -\sin(\vartheta) \tan(\vartheta)(\partial_{x_1} \vartheta) \cos(\vartheta)(\partial_{x_1} \vartheta) \\ &= -\sin^2(\vartheta)(\partial_{x_1} \vartheta)^2 \\ &\stackrel{Gl.(50)}{=} -(\partial_{x_1} u_1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_{x_2} u_1)(\partial_{x_1} u_2) &\stackrel{Gl.(50)}{=} -\sin(\vartheta)(\partial_{x_2} \vartheta) \cos(\vartheta)(\partial_{x_1} \vartheta) \\ &\stackrel{Gl.(51)}{=} -\sin(\vartheta)(\partial_{x_2} \vartheta) \cos(\vartheta) \cot(\vartheta)(\partial_{x_2} \vartheta) \\ &= -\cos^2(\vartheta)(\partial_{x_2} \vartheta)^2 \\ &\stackrel{Gl.(50)}{=} -(\partial_{x_2} u_2)^2 \end{aligned}$$

Setzt man Gleichung (53) in die Differentialgleichung (52) für  $\bar{p}$  ein erhält man:

$$\nabla_x \cdot ((I - u \otimes u) \nabla_x \bar{p}) = 0$$

Das kann äquivalent als

$$-(u^\perp \cdot \nabla_x)^2 \bar{p} - (\nabla_x \cdot u^\perp)(u^\perp \cdot \nabla_x) \bar{p} = 0 \quad (54)$$

schreiben. Dann wirkt nur der Operator  $(u^\perp \cdot \nabla_x)$  auf  $\bar{p}$ .

Um  $\bar{p}$  im Inneren eines Clusters zu bestimmen, genügt es die Randwerte von  $\bar{p}$  zu wissen. Von dem Rand aus können wir dann, entlang der Integralkurven von  $u^\perp$ ,  $\bar{p}$  in jedem Punkt bestimmen. Da diese Kurven nach Proposition (6.2) gerade Linien sind, wird Gleichung (54) zu einem ein dimensionalen, elliptischen Problem auf diesen Linien.

Um unser Modell endgültig abzuschließen müssen wir also noch einen Weg finden, um die Randwerte der Gebiete mit  $\rho = \rho^*$  zu bestimmen.

### 6.3 Randbedingungen

Wir haben bereits festgestellt, dass auf Grund der Annahme  $|u| = 1$  unser Modell im Allgemeinen nicht konservativ ist. Das führt zu Problemen, da man für konservative Systeme die Randbedingungen für den Druck aus den Rankine-Hugoniot Bedingungen, für die Grenzen zwischen inkompressiblen und kompressiblen Gebieten, gewinnen kann. Wir müssen uns also überlegen, wie wir die Randbedingungen für  $\bar{p}$  trotzdem finden können.

Betrachten wir zunächst die Rankine-Hugoniot Bedingung, die für unser System durch folgende Proposition gegeben ist.

#### 6.3 Proposition (P. Degond, L. Navoret, R. Bon, D. Sanchez [4])

Sei  $n \in \mathbb{R}^2$  der Normaleneinheitsvektor, beziehungsweise  $n^\perp \in \mathbb{R}^2$  der Einheitsvektor in Tangentialrichtung, auf einer Unstetigkeitslinie  $\Gamma$  und bezeichne  $[\phi]_\Gamma = \phi_r - \phi_l$  den Sprung über diese Linie, wobei  $\phi_r$  rechts und  $\phi_l$  links von der Linie definiert sind, sowie  $\sigma$  deren Geschwindigkeit, dann gilt:

i) Falls  $\rho$  und  $u$  auf beiden Seiten von  $\Gamma$  glatt sind, dann gilt

$$[\rho(u \cdot n - \sigma)]_\Gamma = 0.$$

ii) Falls  $u$  glatt über  $\Gamma$  und  $\rho$  glatt auf beiden Seiten von  $\Gamma$  ist, dann gilt

$$[\bar{p}]_\Gamma(u \cdot n^\perp) = 0.$$

Wir bemerken, dass die zweite Relation ein  $u$  voraussetzt, dass glatt über den Rand der Herde ist. Das haben wir leider nicht gegeben.

Um die richtigen Sprungbedingungen zu erhalten, führen wir ein neues Koordinatensystem ein, so dass  $x_1$  in Normalen- und  $x_2$  in Tangentialrichtung von  $\Gamma$  zeigt. Setzen

wir die Polarkoordinaten-Darstellung von  $u$  in die Gleichungen (42) und (43) ein und nutzen  $\cos(\vartheta)^2 + \sin(\vartheta)^2 = 1$ , so erhalten wir:

$$\partial_t \rho + \partial_{x_1}(\rho \cos(\vartheta)) + \partial_{x_2}(\rho \sin(\vartheta)) = 0 \quad (55)$$

$$(\partial_t \vartheta + \cos(\vartheta) \partial_{x_1} \vartheta + \sin(\vartheta) \partial_{x_2} \vartheta) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \sin^2(\vartheta) \partial_{x_1} \bar{p} - \cos(\vartheta) \sin(\vartheta) \partial_{x_2} \bar{p} \\ -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \partial_{x_1} \bar{p} + \cos^2(\vartheta) \partial_{x_2} \bar{p} \end{pmatrix} = 0$$

Klammern wir im hinteren Teil noch  $(-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))^T$  aus, erhalten wir

$$\left[ (\partial_t \vartheta + \cos(\vartheta) \partial_{x_1} \vartheta + \sin(\vartheta) \partial_{x_2} \vartheta) + \epsilon (-\sin(\vartheta) \partial_{x_1} \bar{p} + \cos(\vartheta) \partial_{x_2} \bar{p}) \right] \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = 0, \quad (56)$$

wobei  $\bar{p} \equiv \bar{p}(\rho)$  ist. Wir nehmen an, dass die Änderungen in die Richtung, tangential zu der Grenze des Clusters, lokal glatt sind. Deshalb konzentrieren wir uns auf die möglichen Sprünge in Normalenrichtung. Dazu skalieren wir, wie folgt:  $x_1 = \delta x'_1$ ,  $x_2 = x'_2$  und  $t = \delta t'$ . Das heißt, wir erhalten die angepassten Differential-Operatoren durch  $\partial_{x'_1} = \delta \partial_{x_1}$ ,  $\partial_{x'_2} = \partial_{x_2}$  und  $\partial_{t'} = \delta \partial_t$ . Setzen wir dies in die Gleichungen (55) und (56) ein, und multiplizieren mit  $\delta$ , so steht vor allen Termen, in denen  $\partial'_{x_2}$  vorkommt, ein  $\delta$ . Lassen wir  $\delta \rightarrow 0$  erhalten wir

$$\partial_{t'} \rho + \partial_{x'_1}(\rho \cos(\vartheta)) = 0$$

$$\left[ \partial_{t'} \vartheta \cos(\vartheta) \partial_{x'_1} \vartheta - \epsilon \sin(\vartheta) \partial_{x'_1} \bar{p}(\rho) \right] \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = 0.$$

Da  $(-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))^T \neq 0$  für alle Winkel  $\vartheta$  gilt, muss der Term in den eckigen Klammern Null werden. Wir können also zu folgendem hyperbolischen System vereinfachen

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho \cos(\vartheta)) = 0 \quad (57)$$

$$\partial_t \vartheta + \cos(\vartheta) \partial_x \vartheta - \epsilon \sin(\vartheta) \partial_x \bar{p}(\rho) = 0, \quad (58)$$

mit den Umbenennungen  $x = x'_1$  und  $t = t'$ . Für dieses Problem finden wir analytische Lösungen, zu bestimmten Anfangsbedingungen, die auf einem Sprung zwischen zwei konstanten Zuständen beruhen. Da wir diese Sprungbedingung für unser System nicht kennen, müssen wir weitere Annahmen treffen. Eine Möglichkeit ist es, das System in ein konservatives System zu überführen. Dazu benötigen wir noch folgendes Ergebnis.

#### 6.4 Lemma

Sei  $g \equiv g(\rho, \vartheta)$  und  $f \equiv f(\rho, \vartheta)$ . falls  $(g, f)$  eine konservative Lösung von den Gleichungen (57) und (58) ist, so sind deren Ableitungen wie folgt verknüpft:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial g}{\partial \rho} \cos(\vartheta) - \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \epsilon \sin(\vartheta) \bar{p}'(\rho), \quad \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \cos(\vartheta) - \frac{\partial g}{\partial \rho} \rho \sin(\vartheta)$$

Falls  $g$  eine Funktion der Form  $g(\rho, \vartheta) = \Phi(\rho) \Psi(\vartheta)$  ist, dann erfüllen  $\Phi$  und  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \rho \Phi''(\rho) &= k \bar{p}'(\rho) \Phi(\rho) \\ \epsilon (\Psi''(\vartheta) + \cot(\vartheta) \Psi'(\vartheta)) &= k \Psi(\vartheta), \end{aligned}$$

wobei es zu jeder Konstanten  $k \in \mathbb{R}$  mögliche Lösungspaare  $(g, f)$  gibt.

**Beweis:** Die allgemeinste Form für ein konservatives System ist

$$\partial_t g(\rho(t, x), \vartheta(t, x)) + \partial_x f(\rho(t, x), \vartheta(t, x)) = 0$$

Daraus folgt mit Kettenregel

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = - \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right).$$

Setzen wir Gleichungen (57) und (58) für  $\partial_t \rho$  beziehungsweise  $\partial_t \vartheta$  ein, erhalten wir

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \left[ (\partial_x \rho) \cos(\vartheta) - \rho \sin(\vartheta) \partial_x \vartheta \right] + \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \left[ \cos(\vartheta) \partial_x \vartheta - \epsilon \sin(\vartheta) \partial_x \bar{p}(\rho) \right] = \frac{\partial f}{\partial \rho} \partial_x \rho + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \partial_x \vartheta$$

und durch umsordieren

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial \rho} \cos(\vartheta) - \epsilon \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \sin(\vartheta) \bar{p}'(\rho) \right] \partial_x \rho + \left[ \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \cos(\vartheta) - \frac{\partial g}{\partial \rho} \rho \sin(\vartheta) \right] \partial_x \vartheta = \frac{\partial f}{\partial \rho} \partial_x \rho + \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \partial_x \vartheta.$$

Vergleichen wir die Koeffizienten vor  $\partial_x \rho$ , sowie vor  $\partial_x \vartheta$ , auf beiden Seiten der Gleichung, erhalten wir die Verknüpfungen

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial g}{\partial \rho} \cos(\vartheta) - \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \epsilon \sin(\vartheta) \bar{p}'(\rho), \quad \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \cos(\vartheta) - \frac{\partial g}{\partial \rho} \rho \sin(\vartheta)$$

zwischen den partiellen Ableitungen von  $f$  und  $g$ . Leiten wir diese nach  $\vartheta$ , beziehungsweise nach  $\rho$  ab, erhalten wir mit Kettenregel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta \partial \rho} = -\sin(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial \rho} + \cos(\vartheta) \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta \partial \rho} - \epsilon \cos(\vartheta) \bar{p}'(\rho) \frac{\partial g}{\partial \vartheta} - \epsilon \sin(\vartheta) \bar{p}'(\rho) \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2},$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial \vartheta} = \cos(\vartheta) \frac{\partial^2 g}{\partial \rho \partial \vartheta} - \sin(\vartheta) \frac{\partial g}{\partial \rho} - \rho \sin(\vartheta) \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}.$$

Dann gilt nach Satz von Schwarz und teilen durch  $-\sin(\vartheta)$

$$\epsilon \cot(\vartheta) \bar{p}'(\rho) \frac{\partial g}{\partial \vartheta} + \epsilon \bar{p}'(\rho) \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2} = \rho \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}.$$

Nehmen wir nun an, dass  $g$  der Form  $g(\rho, \vartheta) = \Phi(\rho)\Psi(\vartheta)$  ist, können wir umsordieren:

$$\frac{\epsilon (\cot(\vartheta) \Psi'(\vartheta) + \Psi''(\vartheta))}{\Psi(\vartheta)} = \frac{\rho \Phi''(\rho) - \Phi'(\rho)}{\bar{p}'(\rho) \Phi(\rho)}.$$

Da die Variablen jeweils nur auf einer Seite der Gleichung vorkommen, können wir beide Seiten gleich einer Konstanten  $k \in \mathbb{R}$  setzen:

$$\begin{aligned} \epsilon (\cot(\vartheta) \Psi'(\vartheta) + \Psi''(\vartheta)) &= \Psi(\vartheta) k \\ \rho \Phi''(\rho) - \Phi'(\rho) &= k \bar{p}'(\rho) \Phi(\rho). \end{aligned}$$

□

Für  $k = 0$  erhalten wir aus Lemma (6.4) für  $g$  das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\cot(\vartheta)\Psi'(\vartheta) + \Psi''(\vartheta) &= 0 \\ \rho\Phi''(\rho) - \Phi'(\rho) &= 0.\end{aligned}$$

Für dessen Lösungen gilt  $\Phi \in \text{span}\{1, \rho\}$  und  $\Psi \in \text{span}\{1, \ln(\tan^2(\frac{\vartheta}{2}))\}$ . Damit können wir Funktionspaare  $(g, f)$  finden, für die die Gleichungen (57) und (58) ein konservatives System bilden.

$$\begin{aligned}\Phi = 1 \quad \Psi = 1 & & \frac{\partial g}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial g}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \xRightarrow{\text{Lem.}(6.4)} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial f}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \Rightarrow f &= \text{const} = c_f \\ \Rightarrow (g, f) &= (c_g, c_f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi = \rho \quad \Psi = 1 & & \frac{\partial g}{\partial \rho} &= 1 & \frac{\partial g}{\partial \vartheta} &= 0 \\ \xRightarrow{\text{Lem.}(6.4)} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= \cos(\vartheta) & \frac{\partial f}{\partial \vartheta} &= -\rho \sin(\vartheta) \\ \Rightarrow f &= \rho \cos(\vartheta) \\ \Rightarrow (g, f) &= (\rho, \rho \cos(\vartheta))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi = 1 \quad \Psi = \frac{1}{2} \ln(\tan^2(\frac{\vartheta}{2})) & & \frac{\partial g}{\partial \rho} &= 0 & \frac{\partial g}{\partial \vartheta} &= \frac{1}{\sin(\vartheta)} \\ \xRightarrow{\text{Lem.}(6.4)} \frac{\partial f}{\partial \rho} &= -\epsilon \bar{p}'(\rho) & \frac{\partial f}{\partial \vartheta} &= \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \\ \Rightarrow f &= \ln|\sin(\vartheta)| - \epsilon \bar{p}(\rho) \\ \Rightarrow (g, f) &= (\frac{1}{2} \ln(\tan^2(\frac{\vartheta}{2})), \ln|\sin(\vartheta)| - \epsilon \bar{p}(\rho))\end{aligned}$$

So wären noch weitere Lösungen konstruierbar, die allerdings noch komplizierter wären. Da uns zwei Gleichungen genügen und wir den trivialen Fall außer Acht lassen wollen, erhalten wir das konservative System:

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho \cos(\vartheta)) = 0 \tag{59}$$

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \ln(\tan^2(\frac{\vartheta}{2})) \right) + \partial_x \left( \ln|\sin(\vartheta)| - \epsilon \bar{p}(\rho) \right) = 0, \tag{60}$$

Für dieses hyperbolische System können wir nun formal die Riemann-Lösung bestimmen und den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  bilden. Die Lösung erfüllt im Grenzwert bestimmte

Sprungbedingungen, die dann auf das System (44)-(47) übertragen werden können. Auf diese Weise können wir die Sprungbedingungen für den Druck  $\bar{p}$  an den Grenzflächen zwischen allen möglichen Kombinationen aus Vakuum (V), Clustern (C) und Nicht-Clustern (NC) finden. Nur für den Rand zwischen zwei Clustern müssen wir eine andere Methode wählen. Die Ergebnisse werden in dem folgenden Satz präsentiert, dabei wird die Notation mit den eckigen Klammern wie in Proposition (6.3) benutzt.

**6.5 Satz** (Formal Statement)

Sei  $\Psi(\cos(\vartheta)) = -\frac{1}{2} \ln(\tan^2(\frac{\vartheta}{2}))$  und  $\Phi(\cos(\vartheta)) = -\ln|\sin(\vartheta)|$ . Die Randbedingungen für das System (44)-(47) sind gegeben durch:

- **Grenzfläche (C)-(NC)** Der Sprung im Druck ist gegeben durch:

$$[\bar{p}] = \frac{[\Psi(\cos(\vartheta))][\rho \cos(\vartheta)]}{[\rho]} - [\Phi(\cos(\vartheta))]$$

Und die Geschwindigkeit des Schocks ist gegeben durch die Rankine-Hugoniot Bedingung

$$\sigma = \frac{[\rho \cos(\vartheta)]}{[\rho]}$$

- **Grenzfläche (NC)-(V)** Der Druck  $\bar{p}$  ist gleich Null und die Grenzfläche bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\sigma = \cos(\vartheta) = u \cdot n$  des (NC) Gebiets in Normalenrichtung zu der Grenzfläche.

$$\sigma = \cos(\vartheta)_{NC}$$

- **Grenzfläche (C)-(V)** Der Druck  $\bar{p}$  ist gleich Null und die Grenzfläche bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\sigma = \cos(\vartheta) = u \cdot n$  des (NC) Gebiets in Normalenrichtung zu der Grenzfläche.

$$\sigma = \cos(\vartheta)_C$$

- **Grenzfläche (NC)-(NC)** Die Grenze ist eine Grenze zwischen zwei Gebieten mit unterschiedlichen Dichten, die beide jeweils kleiner sind als die maximale. Der Druck  $\bar{p}$  ist gleich Null und die Geschwindigkeit in Normalenrichtung ist stetig und äquivalent zu der Geschwindigkeit der Grenzfläche.

$$[\cos(\vartheta)] = 0, \quad \sigma = \cos(\vartheta)$$

## 6.4 Cluster Dynamik

Für die Grenzflächen zwischen zwei Clustern liefert das Riemann Problem, ebenso wie das Standard Euler-Problem, keine Ergebnisse, da der Druck infinitesimal klein wird. Wir werden deshalb eine andere Methode die durch [3] motiviert ist, verfolgen. Wir zeigen zunächst, dass der Druckterm eine Komponente erhält, die nur im Kollisionszeitpunkt wirkt.

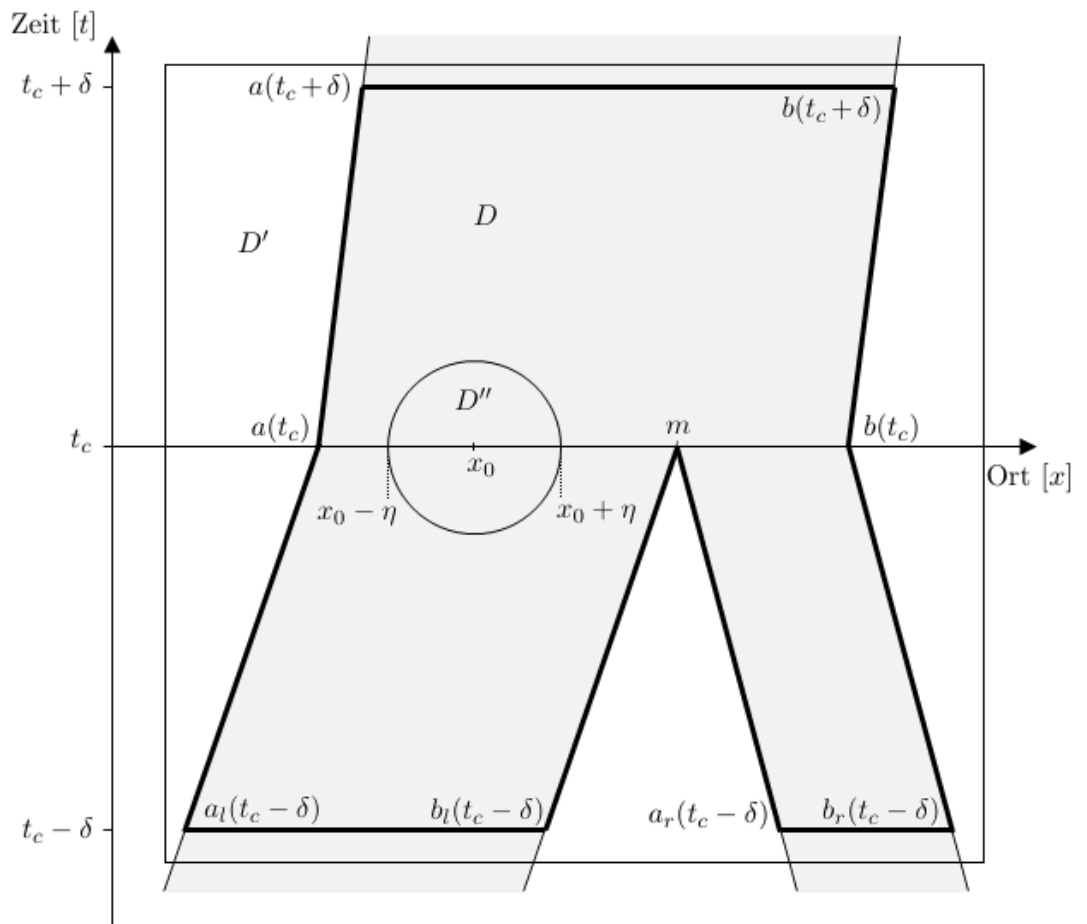


Abbildung 6.3: Kollision von zwei eindimensionalen Clustern



Im Folgenden betrachten wir zwei kollidierende Cluster endlicher Größe im eindimensionalen Raum. Nachdem die Cluster zum Zeitpunkt  $t_c$  zusammengestoßen sind, formen sie für  $t > t_c$  einen großen neuen Cluster. Die Bezeichnungen sind der Skizze (6.3) zu entnehmen. Offensichtlich gilt für  $t < t_c$

$$\begin{aligned}\rho &= \rho^* \mathbb{1}_{[a_l(t), b_l(t)]} + \rho^* \mathbb{1}_{[a_r(t), b_r(t)]} \\ \vartheta &= \vartheta \mathbb{1}_{[a_l(t), b_l(t)]} + \vartheta \mathbb{1}_{[a_r(t), b_r(t)]}\end{aligned}$$

und für  $t > t_c$

$$\begin{aligned}\rho &= \rho^* \mathbb{1}_{[t, b(t)]} \\ \vartheta &= \vartheta \mathbb{1}_{[t, b(t)]}.\end{aligned}$$

In [3] wurde ein ähnliches Problem untersucht. Die dort beschriebene Lösungsstrategie motiviert uns nach einem Druckterm, der die Form  $\bar{p} = \pi(x)\delta(t - t_c)$  hat, zu suchen. In der folgenden Proposition sind die Bedingungen festgehalten, die erfüllt sein müssen, damit es eine solche Lösung für  $\bar{p}$  geben kann. Weiterhin wird gezeigt, dass ein solches  $\bar{p}$  tatsächlich das konservative System (59)-(60) erfüllt.

### 6.6 Proposition

Seien die Bezeichnungen wie in Abbildung (6.3),  $\Phi$  und  $\Psi$  definiert wie in (6.5) und  $\pi$  stetig.

- i) Ist  $\bar{p} = \pi(x)\delta(t - t_c)$  innerhalb und  $\bar{p} = 0$  außerhalb der Cluster, so erfüllen  $\vartheta$  und  $\pi$ :

$$(\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l)))(m - a(t_c)) + (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r)))(b(t_c) - m) = 0$$

$$\pi(x) = \begin{cases} (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l)))(m - x) \\ \quad + (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r)))(b(t_c) - m) & \text{für } x \in [a(t_c), m] \\ (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r)))(b(t_c) - x) & \text{für } x \in [m, b(t_c)] \end{cases}$$

- ii) Ist i) erfüllt, so ist  $(\rho, \vartheta, p)$  eine Lösung des konservativen Systems (59)-(60).

#### Beweis:

- i) Sei  $x_0 \in [a(t_c), m]$  ein Punkt und  $h(t, x) \in C_c^\infty(D'')$  eine Testfunktion, wobei  $D''$

eine kleine Umgebung von  $x_0$  in  $D$  ist, dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \langle \partial_t \Psi(\cos(\vartheta)) + \partial_x \Phi(\cos(\vartheta)), h \rangle \\
 &= \iint_{D''} \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} h \, dx dt \\
 &\stackrel{\text{Gau\ss}}{=} \int_{\partial D''} h \left( \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \cdot n \right) ds - \iint_{D''} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} h \, dt dx \\
 &\stackrel{h \in C_c^\infty}{=} - \iint_{D''} \begin{pmatrix} \Psi \\ \Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_x \end{pmatrix} h \, dt dx \\
 &= - \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \int_{t_c^-}^{t_c^+} \Psi(\cos(\vartheta)) \partial_t h + \Phi(\cos(\vartheta)) \partial_x h \, dt dx \\
 &\stackrel{\text{Def. } \vartheta}{=} - \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \int_{t_c^-}^{t_c} \Psi(\cos(\vartheta_l)) \partial_t h \, dt + \int_{t_c}^{t_c^+} \Psi(\cos(\vartheta)) \partial_t h \, dt dx \\
 &\quad - \int_{t_c^-}^{t_c^+} \Phi(\cos(\vartheta)) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} \partial_x h \, dx dt \\
 &= - \Psi(\cos(\vartheta_l)) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} h(t_c, x) - h(t_c^-, x) \, dx \\
 &\quad - \Psi(\cos(\vartheta)) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} h(t_c^+, x) - h(t_c, x) \, dx \\
 &\stackrel{h \in C_c^\infty}{=} (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l))) \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} h(t_c, x) \, dx, \tag{61}
 \end{aligned}$$

mit  $t_c^\pm = \pm \sqrt{\eta^2 - (x - x_0)^2}$ .

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
 -\langle \partial_x \bar{p}, h \rangle &\stackrel{P.I.}{=} \iint_{D''} \bar{p} \partial_x h \, dt dx \\
 &\stackrel{\text{Def. } \bar{p}}{=} \iint_{D''} \pi(x) \delta(t - t_c) \partial_x h \, dt dx \\
 &= \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \pi(x) \partial_x h(t_c, x) \, dx \\
 &\stackrel{P.I.}{=} - \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \partial_x \pi(x) h(t_c, x) \, dx. \tag{62}
 \end{aligned}$$

Falls  $\bar{p}$  Lösung vom konservativen System (59)-(60) ist, folgt aus Gleichung (60)

$$\langle \partial_t \Psi(\cos(\vartheta)) + \partial_x \Psi(\cos(\vartheta)), h \rangle = -\langle \partial_x \bar{p}, h \rangle$$

und das impliziert mit Gleichungen (61) und (62), dass

$$\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l)) = -\partial_x \pi.$$

Wir können analog für alle beliebigen  $x \in [a(t_c), b(t_c)]$  argumentieren. Für  $x \in [m, b(t_c)]$  erhalten wir natürlich  $\vartheta_r$  anstatt  $\vartheta_l$ . Daraus folgt:

$$-\partial_x \pi(x) = \begin{cases} (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l))) & \text{für } x \in [a(t_c), m] \\ (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r))) & \text{für } x \in [m, b(t_c)] \end{cases} \tag{63}$$

Da  $\pi$  stetig und Null außerhalb von  $D$  sein soll, gelten die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 \pi(a(t_c)) &= 0 \\
 \pi(b(t_c)) &= 0 \\
 \lim_{x \searrow m} \pi(x) &= \lim_{x \nearrow m} \pi(x).
 \end{aligned}$$

Deshalb muss

$$\pi(x) = \begin{cases} (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l)))(m - x) \\ \quad + (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r)))(b(t_c) - m) & \text{für } x \in [a(t_c), m] \\ (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r)))(b(t_c) - x) & \text{für } x \in [m, b(t_c)] \end{cases}$$

gelten, mit

$$(\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l)))(m - a(t_c)) + (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r)))(b(t_c) - m) = 0.$$

- ii) Es bleibt zu zeigen, dass das System (59)-(60) erfüllt ist. Da im inneren von  $D$   $\rho(t, x) = \rho^*$  gilt und  $\cos(\vartheta)$  in den verschiedenen Bereichen von  $D$  konstant ist, gilt offensichtlich:

$$\langle \partial_t \rho + \partial_x(\rho \cos(\vartheta)), h \rangle = 0$$

Also ist Gleichung (59) im schwachen Sinne erfüllt. Analog zum ersten Teil des Beweises können wir für  $h \in C_c^\infty(D)$  zeigen, dass

$$\begin{aligned} \langle \partial_t \Psi(\cos(\vartheta)) + \partial_x \Phi(\cos(\vartheta)), h \rangle &= \int_{a(t_c)}^m (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_l))) h(t_c, x) dx \\ &\quad + \int_m^{b(t_c)} (\Psi(\cos(\vartheta)) - \Psi(\cos(\vartheta_r))) h(t_c, x) dx \end{aligned}$$

gilt. Mit der Definition (63) von  $-\partial_x \pi$  erhalten wir:

$$\langle \partial_t \Psi(\cos(\vartheta)) + \partial_x \Phi(\cos(\vartheta)), h \rangle = - \int_{a(t_c)}^{b(t_c)} \partial_x \pi h(t_c, x) dx = -\langle \bar{p}, h \rangle.$$

Also ist Gleichung (60) im schwachen Sinne erfüllt.

□

### Auswertung

Wir haben gezeigt, dass das makroskopische Herdenmodell (44)-(47) mit dem Satz (6.5) vervollständigt werden muss. Denn erst dieser Satz legt die Randwerte für den Druck auf den Clustergrenzen fest. In dem Fall, dass zwei Herden aufeinander treffen, versagt das Modell allerdings, da Satz (6.5) hier keine Randbedingungen liefert. In Proposition (6.6) haben wir dieses Problem für eindimensionale Cluster behoben, für zwei Dimensionen wird das Problem allerdings wesentlich komplizierter, da die Herden alle möglichen Formen haben können.

# 7 Anhang

## Größen

In der Arbeit sind wir um eine möglichst durchgängige Notation bemüht. Da wir das Schwarmverhalten in einem anderen Setting betrachten, ist es nicht zu vermeiden, dass gewisse Größen der neuen Situation angepasst werden. Sollte eine Variable im zweiten Teil der Arbeit die gleiche Bezeichnung, aber andere Eigenschaften haben, als im Ersten, so ist dies in der dritten Spalte notiert. Ist diese Spalte leer, gelten die Eigenschaften, die in der zweiten Spalte festgehalten sind, für die gesamte Arbeit.

	Kapitel 1-5	Kapitel 6
Zeit	$t \in \mathbb{R}_+$	
Ort	$x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$	$x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$
Massendichte	$\rho \equiv \rho(t, x) \in \mathbb{R}_+$	
Geschwindigkeitsfeld	$u \equiv u(t, x)$ $= (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$	$u \equiv u(t, x)$ $= (u_1, u_2)^T \in \mathbb{S}^1$
Spannungstensor	$\sigma \equiv \sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	
Einheitsmatrix	$I \in \mathbb{R}^3$	$I \in \mathbb{R}^2$
Druck	$\tilde{p} \equiv \tilde{p}(t, x) \in \mathbb{R}$	
Skalierter Druck	$p \equiv p(t, x) = \frac{\tilde{p}}{\rho} \in \mathbb{R}$	
Viskosität	$\lambda \in \mathbb{R}$	
Kinematische Viskosität	$\nu = \frac{\lambda}{\rho} \in \mathbb{R}$	
Geschwindigkeit eines Teilchens	$v \in \mathbb{R}^3$	
Geschwindigkeit eines Teilchens nach Kollision	$v' \in \mathbb{R}^3$	
Teilchendicht im Phasenraum	$F(t, x, v)$	
Maxwellverteilung	$\mathcal{M}_{(\rho, u, \theta)}(v) = \frac{\rho}{(2\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{ v-u ^2}{2\theta}}$	
Normalverteilung	$M(v) = \mathcal{M}_{(1,0,1)}(v)$	
Relative Fluktuationen der Teilchendichte im Phasenraum	$g_\epsilon(t, x, v)$	

---

	Kapitel 1-5	Kapitel 6
Repulsivkraft		$F_r \in \mathbb{R}^2$
Anziehungskraft		$F_a \in \mathbb{R}^2$
Reichweite der Kraft $F^j$		$R_j \in \mathbb{R}^2$
Skalierungsfunktion der Kraft $F^j$		$\alpha_j \in \mathbb{R}$
Vektor zum Massenschwerpunkts aller Teilchen im Wirkungsbereich der Kraft $F^j$		$\xi_j \in \mathbb{R}^2$
Aufenthaltort des j-ten Tieres		$X \in \mathbb{R}^2$
Maximale Dichte		$\rho^* \in \mathbb{R}$

## Operatoren

In dieser Liste sind die Definitionen aller benutzten Operatoren, die nicht absolut grundlegend sind, aufgeführt, sofern diese nicht explizit in der Arbeit angegeben sind.

Seien  $a(x) = (a_i(x))_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ ,  $b(x) = (b_i(x))_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  beliebige Vektoren und  $A = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B = (b_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C = (C_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$  mit  $C_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beliebige Matrizen und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Skalar. Im ersten Teil der Arbeit gilt generell  $n = 3$ , im zweiten dann  $n = 2$ .

Divergenz	$\nabla_x \cdot a = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} a_i \in \mathbb{R}$
	$a \cdot \nabla_x = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} \in \mathbb{R}$
Gradient für Vektoren (Jacobi-Matrix)	$\nabla_x a = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} a_1 & \dots & \partial_{x_n} a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} a_n & \dots & \partial_{x_n} a_n \end{pmatrix} = (\partial_{x_j} a_i)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
symmetrisierter Gradient	$D(a) = (\nabla_x a)(\nabla_x a)^T - \frac{2}{3} \nabla_x \cdot a \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Laplace-Operator	$\Delta_x a = \nabla_x \cdot \nabla_x a = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 a_i \in \mathbb{R}$
Tensorprodukt für Vektoren	$a \otimes b = (a_i b_j)_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Tensorprodukt für Matrizen	$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$
Skalarprodukt für Matrizen	$A : \alpha = \text{spur}(A\alpha) \in \mathbb{R}$
Matrizenprodukt	$C : A = (C_{ij} : a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Strich-Operatoren	$a'(x) = \frac{d}{dx} a(x) \quad a''(x) = \frac{d^2}{dx^2} a(x)$
Sprung von $\phi$ über $\Gamma$	$[\phi]_\Gamma = \phi_r - \phi_l \quad \text{siehe auch Proposition (6.3)}$

### Funktionen

Indikatorfunktion	$\mathbb{1}_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Dirac'sche Deltafunktion	$\delta(x - x_0)$ mit $\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$

## Literaturverzeichnis

- [1] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore: *Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations*, J. Statist. Phys. 63 (1991): 323-344.
- [2] C. Bardos, F. Golse, C.D. Levermore: *Fluid Dynamic Limits of Kinetic Equations II: Convergence Proofs for the Boltzmann Equation*, Comm. Pure & Appl. Math 46 (1993): 667–753
- [3] F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, J.F. Ripoll: *A hierarchy of models for two-phase flow*, Journal of NonLinear Science 10(6) (2000): 639-660.
- [4] P. Degond, L. Navoret, R. Bon, D. Sanchez: *Congestion in a macroscopic model of self-driven particles modeling gregariousness*, Journal of Statistical Physics 138.1-3 (2010): 85-125.
- [5] C. Eck, H. Garcke, P. Knabner: *Mathematische Modellierung*, Springer (2008): 191-284
- [6] F. Golse: *Hydrodynamic Limits*, In European Congress of Mathematics. Stockholm (2004), ed. by A. Laptev, European Math. Soc. Publishing House, Zürich (2005): 669–717.
- [7] F. Golse: *The Boltzmann Equation and its Hydrodynamic Limits*, Handbook of Diff. Eq., Evolutionary Eq. vol. 2, ed. by C.M. Dafermos and E. Feireisl (2005)
- [8] F. Golse, L. Saint-Raymond: *Velocity averaging in  $L^1$  for the transport equation* Comptes Rendus Mathematique 334.7 (2002): 557-562.
- [9] D. Hilbert: *Begründung der kinetischen Gastheorie*, Mathematische Annalen 72.4 (1912): 562-577.
- [10] J. Leray: *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. 63 (1934): 296-305
- [11] P.-L. Lions: *Conditions at infinity for boltzmann's equation*, Communications in partial differential equations 19.1-2 (1994): 335-367.



## Online-Quellenverzeichnis

- [12] [http://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig\\_Boltzmann](http://de.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann)
- [13] [http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](http://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler)
- [14] [http://de.wikipedia.org/wiki/James\\_Clerk\\_Maxwell](http://de.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)
- [15] <http://de.wikipedia.org/wiki/Navier>
- [16] [http://de.wikipedia.org/wiki/George\\_Gabriel\\_Stokes](http://de.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes)
- [17] [http://de.wikipedia.org/wiki/Gleichungen\\_von\\_Navier-Stokes](http://de.wikipedia.org/wiki/Gleichungen_von_Navier-Stokes)
- [18] [www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes\\_Equations/navierstokes.pdf](http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf)

## **Eidesstattliche Erklärung zur Bachelorarbeit**

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbstständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

Münster, den 29.08.2013

---

Johannes Stamm