



# MEAN FIELD GAME MODELLE AM BEISPIEL VON HERDENVERHALTEN UND WOHLSTANDSENTWICKLUNG

BACHELORARBEIT  
zur Erlangung des akademischen Grades  
BACHELOR OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Betreuung:

*Prof. Dr. Martin Burger*

Eingereicht von:

*Tobias Trame*

Münster, Oktober 2013

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, *Tobias Trame*, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Gedanklich, inhaltlich oder wörtlich Übernommenes habe ich durch Angabe von Herkunft und Text oder Anmerkung belegt bzw. kenntlich gemacht. Dies gilt in gleicher Weise für Bilder, Tabellen, Zeichnungen und Skizzen, die nicht von mir selbst erstellt wurden.

Alle auf der CD beigefügten Programme sind von mir selbst programmiert worden.

Münster, 2. Oktober 2013

---

Tobias Trame

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen und Modellierung</b>	<b>3</b>
2.1	Spieltheoretische Grundlagen . . . . .	3
2.2	Kinetisches Teilchenmodell . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Konvergenz gegen Makromodell</b>	<b>8</b>
3.1	Konvergenz gegen Nash-Gleichgewichte . . . . .	8
3.2	Makroskopischer Grenzwert . . . . .	14
3.3	Beispiel zum Tierherdenverhalten . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Numerische Resultate</b>	<b>23</b>
4.1	Beispiel zur Wohlstandsentwicklung . . . . .	23
4.2	Implementierung . . . . .	25
4.2.1	Teilchenmodell . . . . .	25
4.2.2	Kontinuumsmodell . . . . .	27
4.3	Modellvergleich . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>32</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>33</b>

# 1 Einleitung

Mean Field Games stellen eine Synthese der aus der Physik entnommenen Theorie über Molekularfelder (engl. *mean field*) und der wirtschaftswissenschaftlich motivierten Spieltheorie dar. Sie dienen der Beschreibung von Situationen, in denen viele gleichartige Individuen oder Teilchen interagieren und sich so, von außen betrachtet, als Masse bewegen. Mean Field Games ermöglichen die Modellierung unterschiedlichster Anwendungen aus vielen verschiedenen Wissenschaftsbereichen in denen Massendynamiken beobachtet werden. In der statistischen Physik, in der die Wechselwirkungen von Teilchen untersucht werden, in der Biologie, in der man das Verhalten von Tierherden oder Fischeschwärmen betrachtet, in der Soziologie, in der das Verhalten von Menschenmassen bei Großveranstaltungen und in Evakuierungssituationen analysiert wird sowie im Wirtschafts- und Finanzsektor, in dem sich Anleger ähnlich einer Herde verhalten können und dadurch Spekulationsblasen verursachen. In dieser Arbeit wird anhand von Beispielen zum Tierherdenverhalten und zur Wohlstandsentwicklung erörtert, wie man mikroskopische und makroskopische Modelle erhält und in welchem Maße diese eine angemessene Beschreibung der jeweiligen Anwendung darstellen. Dazu gehen wir wie folgt vor.

In Kapitel 2 definieren wir die benötigten spieltheoretischen Grundbegriffe wie „Nash-Gleichgewicht“ und „Mean Field Game“. Anschließend stellen wir ein Teilchenmodell auf, das die Bewegungen von Spielern in sogenannten Zustands- und Entscheidungsräumen beschreibt. Die Spieler sind damit Repräsentanten der in der jeweiligen Anwendung interagierenden Teilchen oder Individuen. In Kapitel 3 zeigen wir, dass das Modell im homogenen Fall, der nur die Interaktionen der Spieler im Entscheidungsraum betrachtet, gegen ein Nash-Gleichgewicht konvergiert. Ausgehend von diesen Ergebnissen zeigen wir daraufhin, dass das Teilchenmodell für große Spieleranzahlen gegen ein makroskopisches Modell konvergiert. Wir leiten daraus dann ein konkretes Modell zur Beschreibung von Tierherdenverhalten her. Ein zweites Beispiel zur Wohlstandsentwicklung geben wir in Kapitel 4. Dazu skizzieren wir die Besonderheiten der Mo-

dellierung des Problems und stellen eine Implementierung mit MATLAB vor. Diese berechnet sowohl für das Teilchenmodell, als auch für das kontinuierliche Modell die Langzeitdynamik des Wohlstandes, ausgehend von verschiedenen Startwerten. Zum Schluss beurteilen wir dann in einem Fazit, in welchem Maße sich die Modelle zur Beschreibung der vorgestellten Beispiele eignen.

---

## 2 Mathematische Grundlagen und Modellierung

In diesem Kapitel wird zuerst ein kurzer Überblick über die benötigten mathematischen Grundlagen gegeben. Es werden grundlegende Definitionen geliefert und ausgehend davon ein kinetisches Teilchenmodell aufgestellt, das die erwähnten Anwendungen beschreibt.

### 2.1 Spieltheoretische Grundlagen

Da die Begriffe *Nash-Gleichgewicht* und *Mean-Field-Game* für die folgende Modellierung essenziell sind, wird an dieser Stelle eine kurze Einführung in die Spieltheorie gegeben, die im Wesentlichen den Arbeiten [10, 12] folgt. Ziel der Spieltheorie ist die Modellierung sozialer Konfliktsituationen, in denen die Individuen interagieren und sich dadurch gegenseitig im Entscheidungsverhalten beeinflussen [11]. Mathematisch definiert man wie folgt:

**Definition 1.** Ein *Spiel in Normalform* ist ein Tupel  $(I, \Sigma, \Phi)$ , mit

- einer Menge von Spielern  $I = \{1, 2, \dots, N\}$ ,
- einem Strategieraum  $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_N$ ,  
wobei  $\Sigma_j$  jeweils die Strategiemenge des  $j$ -ten Spielers beschreibt,
- einer Kostenfunktion  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  
wobei die Funktion  $\Phi_j(\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_N)$  die Kosten des  $j$ -ten Spielers beschreibt, abhängig von einer Strategiekombination  $(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \Sigma$ .

Ein Nash-Gleichgewicht beschreibt einen Zustand, in dem kein Spieler seine Situation verbessern kann, wenn er als *einzig* von seiner Strategie abweicht. Der Einzelne kann

also bei fest gewählten Strategien aller Anderen seine Kosten durch eine individuelle Strategieänderungen nicht weiter senken.

**Definition 2.** Eine Strategiekombination  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_N^*) \in \Sigma$  heißt **Nash-Gleichgewicht**, falls für jeden Spieler  $j$  gilt:

$$\Phi_j(\sigma_1^*, \dots, \sigma_j^*, \dots, \sigma_N^*) \leq \Phi_j(\sigma_1^*, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_N^*), \quad \forall \sigma_j \in \Sigma_j.$$

Bei steigender Spieleranzahl wird es jedoch zunehmend aufwändiger alle Interaktionen zwischen den einzelnen Spielern zu kontrollieren und deren Auswirkungen zu berechnen. Daher betrachtet man den Ansatz sogenannter *Differential Games* [9]. Hier werden nicht mehr die Wechselwirkungen zwischen je 2 Spielern betrachtet, sondern lediglich der Einfluss, den jeder Spieler auf das Gesamtsystem ausübt und die Reaktion des Systems auf die einzelnen Spieler. Die Anzahl der zu betrachtenden Interaktionen verhält sich somit linear zur Spieleranzahl.

Will man nun die Dynamik eines solchen Systems für sehr große  $N$  berechnen, versucht man aus dem Teilchenmodell im Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  ein kontinuierliches Modell zu gewinnen. Im Letzterem sind die Spieler dann als infinitesimal zu betrachten, das heißt, man arbeitet mit einer Verteilung von Spielern. Da die Idee dieses Ansatzes der physikalischen Molekularfeldtheorie (engl. *mean field theory*) entspringt, wird diese Modellierung auch als **Mean Field Game** bezeichnet.

Damit man im Grenzwert ein sinnvolles Modell erwarten kann, müssen zuerst noch weitere Annahmen getroffen werden. Zum einen soll die Spieleranzahl fest sein, das heißt, mit fortschreitender Zeit werden weder neue Spieler erzeugt, noch gehen welche verloren. Zum anderen sind alle Spieler als gleich anzunehmen bezüglich ihrer möglichen Strategien und Kostenfunktionen (*anonymes Spiel*). Außerdem darf es nicht erlaubt sein, dass mehrere Spieler zum Erreichen ihrer Ziele zusammenarbeiten (*nicht-kooperatives Spiel*). Dies ermöglicht nun die Definition des kinetischen Teilchenmodells.

## 2.2 Kinetisches Teilchenmodell

Analog zur kinetischen Gastheorie, in der die Zusammenstöße zwischen Molekülen oder Atomen modelliert werden, wird im Folgenden ein Modell aufgestellt, das die Interaktionen zwischen den einzelnen Spielern beschreibt. Dabei folgen wir weitgehend den Ausführungen in [3]. Man betrachte  $N$  rationale Spieler, die sich stetig in einem Zustandsraum  $\mathcal{X}$  bewegen, wobei Rationalität im spieltheoretischen Sinne zu verstehen ist [1]. Ein Zustand  $X \in \mathcal{X}$  kann je nach Anwendung zum Beispiel als geographischer Ort oder als Investitionsneigung eines Händlers interpretiert werden.

Jeder Spieler  $j \in \{1, \dots, N\}$  besitze nun eine Zustandsvariable  $X_j(t) \in \mathcal{X}$  sowie eine Entscheidungsvariable  $Y_j(t)$  aus einem Entscheidungsraum  $\mathcal{Y}$ . Die Entscheidungsvariablen sind zum Beispiel als Bewegungsrichtungen oder, im wirtschaftswissenschaftlichen Kontext, als Vermögen der Händler zu interpretieren. Zur Vereinfachung wird weiter angenommen, dass  $\mathcal{X}$  dem  $\mathbb{R}^n$  entspreche und  $\mathcal{Y}$  eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende Mannigfaltigkeit, eingebettet im  $\mathbb{R}^p$  sei. Weiterhin bewegt sich jeder Spieler im Zustandsraum mit einer Geschwindigkeit  $V(X_j(t), Y_j(t))$ , d.h.

$$\frac{d}{dt}X_j(t) = V(X_j(t), Y_j(t)). \quad (2.1)$$

Für die Dynamik der Entscheidungsvariablen wird jedem Spieler eine Kraft  $F_j^N$  zugeordnet. Diese wirkt, abhängig von den anderen Spielern, auf seine Entscheidung ein und lässt sich somit als Funktion auf  $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^N$  auffassen. Zur Modellierung von Umgebungseinflüssen und Unsicherheiten in den Entscheidungen, werden die Entscheidungsvariablen von  $N$  unabhängigen Brown'schen Bewegungen  $W_j(t)$  überlagert. Das führt zur folgenden stochastischen Differentialgleichung:

$$dY_j(t) = P_{T_{Y_j(t)}} \circ (F_j^N(\vec{X}(t), \vec{Y}(t)) + \sqrt{2d} dW_j(t)). \quad (2.2)$$

Dabei bezeichne  $P_{T_{Y_j(t)}}$  die Projektion auf die Tangentialebene in  $Y_j(t)$  und  $d$  den Diffusionskoeffizienten, der die Intensität der Unsicherheiten steuert. Ferner seien  $\vec{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ ,  $\vec{Y}(t) = (Y_1(t), \dots, Y_N(t))$ . Das Symbol  $\circ$  ist hier im Sinne des Stratonowich-Integrals [7] zu verstehen. Die zugehörige Integralschreibweise zu (2.2) lautet dann:

$$Y_j(t) - Y_j(0) = \int_0^t P_{T_{Y_j(\tau)}} F_j^N(\vec{X}(\tau), \vec{Y}(\tau)) d\tau + \sqrt{2d} \int_0^t P_{T_{Y_j(\tau)}} \circ dW_j(\tau),$$



wobei das Stratonowich-Integral für einen stochastischen Prozess  $Z(t)$  mit einer Brown'schen Bewegung  $W(t)$  wie folgt definiert ist:

$$\int_0^T Z(t) \circ dW(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0=t_0 < \dots < t_n=T} \frac{1}{2} [Z(t_{i+1}) + Z(t_i)] [W(t_{i+1}) - W(t_i)].$$

Im nächsten Schritt muss noch die Kraft  $F_j^N$  genauer spezifiziert werden. Wir nehmen an, dass jeder Spieler versucht ein Nash-Gleichgewicht zu erreichen, er also seine Entscheidungsvariable in Richtung minimaler Kosten lenkt - mathematisch gesprochen also in Richtung des steilsten Abstiegs des Gradienten:

$$F_j^N(\vec{X}(t), \vec{Y}(t)) = -\nabla_{Y_j(t)} \Phi^N(\vec{X}(t), \vec{Y}(t)), \quad (2.3)$$

für eine Kostenfunktion  $\Phi^N$ . Diese berechnet sich für jeden Spieler gleich, da von einem anonymen Spiel ausgegangen wird. Um globale Lösungen des Systems (2.1), (2.2) erwarten zu können, wird  $F_j^N$  als global Lipschitz-stetig angenommen.

Um aus dem Basismodell der einzelnen Spieler ein Model für die Verteilung von Spielern zu erhalten, betrachtet man zunächst die empirische Verteilungsfunktion für  $N$  Spieler:

$$f^N(x, y, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{X_j(t)}(x) \otimes \delta_{Y_j(t)}(y).$$

Damit beschreibt  $f^N$ , welcher Anteil der Spieler sich zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $x$  mit Entscheidungsvariable  $y$  befindet. Ferner ist  $f^N$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

Da wir eine Situation mit hoher Spieleranzahl simulieren möchten, nehmen wir weiter an, dass  $f^N(\cdot, \cdot, t)$  im Mean Field Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  gegen ein absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $f(\cdot, \cdot, t)$  schwach\*-konvergiert. Des Weiteren nehmen wir an, dass im Grenzwert eine Kostenfunktion  $\Phi_f \in C^2(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$  existiert, die nun nicht mehr von allen einzelnen Spielern, sondern von der Grenzverteilung  $f$  abhängt:

$$\Phi^N(\vec{X}, \vec{Y}, t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Phi_{f(t)}(X_j(t), Y_j(t)), \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \forall t \geq 0.$$

Unter diesen Annahmen erhält man für  $N \rightarrow \infty$  nach Anwendung der Itô-Formel [7] und Integration, dass  $f$  als Lösung der folgenden Fokker-Planck-Gleichung gegeben ist

[13]:

$$\partial_t f + \nabla_x \cdot (V(x, y)f) + \nabla_y \cdot (F_f f) = d\Delta_y f, \quad (2.4)$$

$$\text{mit } F_f(x, y, t) = -\nabla_y \Phi_{f(t)}(x, y).$$

Dabei sind die Divergenz- und Laplace-Operatoren in einem verallgemeinerten Sinne zu verstehen. Siehe dazu [3]. Außerdem müssen noch sinnvolle Anfangs- und Randwertbedingungen definiert werden. Für die Anfangswerte geben wir eine Startverteilung  $f_0 = f(0)$  vor. Da nach Voraussetzung die Gesamtanzahl der Spieler in der Zeit nicht variiert, erscheint eine Null-Fluss-Randbedingung sinnvoll:

$$f\partial_n \Phi_f + d\partial_n f = 0, \quad \text{auf } \mathcal{X} \times \partial\mathcal{Y} \quad (2.5)$$

Im Folgenden analysieren wir mit Hilfe von (2.4), (2.5) die Gleichgewichtszustände von  $f$ .

## 3 Konvergenz gegen Makromodell

Zunächst zeigen wir in diesem Kapitel, dass das Teilchenmodell im homogenen Fall gegen Nash-Gleichgewichte konvergiert. Mit Hilfe dieser Erkenntnis erhalten wir dann für den inhomogenen Fall die Konvergenz gegen ein makroskopisches Modell. Neben der mathematischen Herleitung werden wir die Ergebnisse interpretieren und ein erstes Anwendungsbeispiel für Herdenverhalten skizzieren. Dabei folgen wir weiter den Ausführungen in [3].

### 3.1 Konvergenz gegen Nash-Gleichgewichte

Wir betrachten den homogenen Fall der Gleichungen (2.4) und (2.5), das heißt, den Fall, in dem wir das System auf die Entscheidungsvariablen einschränken. Dazu nehmen wir an, dass die Zustands- und Entscheidungsvariablen unabhängig voneinander seien. Damit ist  $f(\cdot, t)$  eine Funktion aus  $\mathcal{P}_{ac}(\mathcal{Y})$ , dem Raum der absolut stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\mathcal{Y}$ . Die Kostenfunktion wird in gleicher Weise eingeschränkt:  $\Phi_f \in C^2(\mathcal{Y})$ . Die Gleichung (2.4) lässt sich jetzt wie folgt vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 & \partial_t f + \nabla_y \cdot (F_f f) = d\Delta_y f \\
 \Leftrightarrow & \quad \partial_t f + \nabla_y \cdot (-\nabla_y \Phi_f f) = d\Delta_y f \\
 \Leftrightarrow & \quad \partial_t f = \nabla_y \cdot (f \nabla_y \Phi_f + d\nabla_y f) =: Q(f). \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir  $Q(f)$  als **Kollisionsoperator**. Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich dieser wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
 Q(f) &= \nabla_y \cdot (f \nabla_y (\Phi_f + d \ln f)) = \nabla_y \cdot (f \nabla_y \mu_f), \\
 & \text{mit } \mu_f(y) = \Phi_f(y) + d \ln f(y) \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Die Funktion  $\mu_f$  bezeichnen wir als *Mean Field Kostenfunktion*. Durch diese Darstellung reduziert sich die Randbedingung (2.5) auf:

$$f \partial_n \mu_f = 0 \quad \text{auf } \partial \mathcal{Y}. \quad (3.3)$$

Um eine Gleichgewichtslösung von  $f$ , also eine Lösung von  $\partial_t f = 0$  zu erhalten, genügt es also die Nullstellen des Kollisionsoperators  $Q(f)$  auszurechnen. Dazu stellen wir  $Q$  mit Hilfe von Gibbs-Maßen [8] dar.

**Definition 3.** Für eine gegebene Kostenfunktion  $\Phi$  und einen Diffusionsparameter  $d$  definieren wir  $M_\Phi$  als das **Gibbs-Maß bezüglich  $\Phi$  und  $d$** , wenn gilt:

$$M_\Phi(y) = \frac{1}{Z_\Phi} \exp\left(-\frac{\Phi(y)}{d}\right), \quad Z_\Phi = \int_{y \in \mathcal{Y}} \exp\left(-\frac{\Phi(y)}{d}\right) dy.$$

In der Definition ist  $Z_\Phi$  lediglich eine Normalisierungskonstante, die  $M_\Phi$  zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte macht. Es gilt also insbesondere:

$$\int_{y \in \mathcal{Y}} M_\Phi(y) dy = 1. \quad (3.4)$$

Die Kostenfunktion  $\Phi$  geht in die Dichte exponentiell und mit negativem Vorzeichen ein. Für hohe Kosten  $\Phi \rightarrow \infty$  bedeutet dies, dass  $M_\Phi$  gegen Null läuft. Für niedrige Kosten  $\Phi \rightarrow 0$  hingegen läuft  $M_\Phi$  gegen eine positive Konstante. Da wir im Gleichgewicht erwarten, dass die Spieler sich in Richtung niedriger Kosten bewegen und sich im Bereich hoher Kosten gerade keine Spieler aufhalten, erscheint es sinnvoll, dass die Verteilung der Spieler  $f$  von der gleichen Form wie  $M_\Phi$  ist. Um dies zu zeigen, benötigen wir die folgende Darstellung des Kollisionsoperators.

**Lemma 4.** Der Kollisionsoperator  $Q(f)$  lässt sich durch Gibbs-Maße schreiben als:

$$Q(f) = d \nabla_y \cdot \left( \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) M_{\Phi_f} \right). \quad (3.5)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
Q(f) &= \nabla_y \cdot (f \nabla_y \Phi_f + d \nabla_y f) \\
&= d \nabla_y \cdot \left[ \left( \frac{1}{d} f \nabla_y \Phi_f + \nabla_y f \right) \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) \exp \left( -\frac{\Phi_f}{d} \right) \right] \\
&= d \nabla_y \cdot \left[ \left( \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) \nabla_y \frac{\Phi_f}{d} f + \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) \nabla_y f \right) \exp \left( -\frac{\Phi_f}{d} \right) \right] \\
&= d \nabla_y \cdot \left[ \left( \nabla_y \left( \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) \right) f + \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) \nabla_y f \right) \exp \left( -\frac{\Phi_f}{d} \right) \right] \\
&= d \nabla_y \cdot \left[ \nabla_y \left( \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) f \right) \exp \left( -\frac{\Phi_f}{d} \right) \right] \\
&= d \nabla_y \cdot \left[ \nabla_y \left( Z_\Phi \exp \left( \frac{\Phi_f}{d} \right) f \right) \frac{1}{Z_\Phi} \exp \left( -\frac{\Phi_f}{d} \right) \right] \\
&= d \nabla_y \cdot \left[ \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) M_{\Phi_f} \right]
\end{aligned}$$

□

Hier wurden Ketten- sowie Produktregel für  $\nabla_y$  angewandt. Zudem wurde ausgenutzt, dass  $Z_\Phi$  eine Konstante ist.

Mithilfe dieser Darstellung lassen sich folgende Integralgleichungen für den Kollisionsoperator  $Q$  herleiten:

**Lemma 5.** *Seien  $f$  und  $g$  zwei genügend glatte Funktion auf  $\mathcal{Y}$ , so gilt:*

$$\int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f) \frac{g}{M_{\Phi_f}} dy = -d \int_{y \in \mathcal{Y}} \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) \cdot \nabla_y \left( \frac{g}{M_{\Phi_f}} \right) M_{\Phi_f} dy, \quad (i)$$

$$\int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f) \frac{f}{M_{\Phi_f}} dy = -d \int_{y \in \mathcal{Y}} \left| \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) \right|^2 M_{\Phi_f} dy \leq 0. \quad (ii)$$

*Beweis.* Wählt man in (i)  $g = f$ , so erhält man (ii). Wir zeigen also (i):

Betrachte die Darstellung von  $Q$  aus Lemma 4. Nach Multiplikation mit  $\frac{g}{M_{\Phi_f}}$  und Integration über  $\mathcal{Y}$  gilt:

$$\int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f) \frac{g}{M_{\Phi_f}} dy = d \int_{y \in \mathcal{Y}} \nabla_y \cdot \left( \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) M_{\Phi_f} \right) \frac{g}{M_{\Phi_f}} dy.$$

Mit der Green'schen Formel folgt:

$$\begin{aligned} \int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f) \frac{g}{M_{\Phi_f}} dy &= -d \int_{y \in \mathcal{Y}} \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) \cdot \nabla_y \left( \frac{g}{M_{\Phi_f}} \right) M_{\Phi_f} dy \\ &+ d \int_{y \in \partial \mathcal{Y}} \partial_n \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) \frac{g}{M_{\Phi_f}} M_{\Phi_f} dS(y). \end{aligned}$$

Falls  $\mathcal{Y}$  keinen Rand besitzt verschwindet der Randterm und wir erhalten (i). Besitzt  $\mathcal{Y}$  einen Rand, so gilt mit der Definition für das Gibbs-Maß  $M_{\Phi_f}$ :

$$\begin{aligned} \frac{f}{M_{\Phi_f}} &= \exp(\ln f) Z_{\Phi_f} \exp\left(\frac{\Phi_f}{d}\right) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \exp\left(\frac{\mu_f}{d}\right). \end{aligned}$$

Und damit folgt für die Normalenableitung:

$$\partial_n \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) = \partial_n \left( \exp\left(\frac{\mu_f}{d}\right) \right) = \exp\left(\frac{\mu_f}{d}\right) \frac{1}{d} \partial_n \mu_f \stackrel{(3.3)}{=} 0,$$

da die Mean-Field-Kostenfunktion  $\mu_f$  auf dem Rand  $\partial \mathcal{Y}$  verschwindet.

Damit verschwindet bereits das gesamte Randintegral und wir erhalten auch in diesem Fall (i).  $\square$

Mit Lemma 5 können wir nun eine eindeutige Darstellung für die Verteilung  $f$  im Gleichgewicht herleiten.

**Proposition 6.** *Die Verteilungsfunktion  $f \in \mathcal{P}_{ac}(\mathcal{Y})$  ist eine Gleichgewichtslösung, d.h. eine Lösung von  $Q(f) = 0$ , genau dann, wenn  $f$  das folgende Fixpunktproblem löst:*

$$f(y) = \frac{1}{Z_{\Phi_f}} \exp\left(-\frac{\Phi_f(y)}{d}\right), \quad Z_{\Phi_f} = \int_{y \in \mathcal{Y}} \exp\left(-\frac{\Phi_f(y)}{d}\right) dy \quad (3.6)$$

*Beweis.* 1.)  $f$  GGW-Lösung  $\Rightarrow f$  löst das Fixpunktproblem.

Für eine Gleichgewichtslösung gilt  $Q(f) = 0$  und damit

$$\int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f) \frac{f}{M_{\Phi_f}} dy = 0,$$

und mit Lemma 5 (ii):

$$-d \int_{y \in \mathcal{Y}} \left| \nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) \right|^2 M_{\Phi_f} dy = 0.$$

Da  $M_{\Phi_f} > 0$  und  $d > 0$  folgt bereits  $\nabla_y \left( \frac{f}{M_{\Phi_f}} \right) = 0$ , also  $\frac{f}{M_{\Phi_f}} = c$ , mit  $c$  konstant. Integration über  $\mathcal{Y}$  ergibt:

$$\int_{y \in \mathcal{Y}} f dy = c \int_{y \in \mathcal{Y}} M_{\Phi_f} dy.$$

Aus (3.4) und  $f \in \mathcal{P}_{ac}(\mathcal{Y})$ , folgt  $c = 1$  und somit  $f = M_{\Phi_f}$ . Also löst  $f$  das Fixpunktproblem.

2.)  $f$  löst das Fixpunktproblem  $\Rightarrow f$  ist GGW-Lösung.

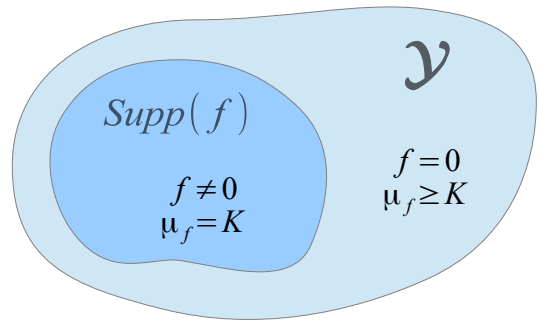
Löst  $f$  das Fixpunktproblem so folgt direkt  $\frac{f}{M_{\Phi_f}} = 1$  und mit Lemma 4 gilt dann  $Q(f) = 0$ . Also ist  $f$  Gleichgewichtslösung.  $\square$

Nachdem wir eine Darstellung für Gleichgewichtslösungen hergeleitet haben, bleibt festzustellen, ob es sich tatsächlich um Nash-Gleichgewichte handelt. Dazu definieren wir zunächst, wann ein Wahrscheinlichkeitsmaß einen solchen Zustand beschreibt.

**Definition 7.** Sei  $f$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Betrachte ein Mean Field Game mit Kostenfunktion  $\mu_f$ . Dann heißt  $f$  **Nash-Gleichgewichts-Maß**, falls eine Konstante  $K$  existiert, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \mu_f(y) &= K & \forall y \in \text{Supp}(f), \\ \mu_f(y) &\geq K & \forall y \in \mathcal{Y}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Im Nash-Gleichgewicht befinden sich alle Spieler dort, wo die Kosten  $\mu_f$  konstant sind. Im Bereich höherer Kosten ( $\mu_f \geq K$ ) befindet sich hingegen kein Spieler.



**Satz 8.** *Ein absolut stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $f$  ist ein Nash-Gleichgewichtsmaß, genau dann, wenn es eine Gleichgewichtslösung ist.*

*Beweis.* Sei  $f_{\text{eq}}$  eine Gleichgewichtslösung und somit Lösung des Fixpunktproblems (3.6). Da  $\mathcal{Y}$  kompakt ist und  $\Phi_f$  stetig für alle  $f \in \mathcal{P}_{\text{ac}}(\mathcal{Y})$ , ist  $\Phi_{f_{\text{eq}}}$  beschränkt und es folgt:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \Phi_{f_{\text{eq}}}(y) < \infty &\Rightarrow \inf_{y \in \mathcal{Y}} \exp\left(-\frac{\Phi_{f_{\text{eq}}}(y)}{d}\right) > 0 \\ \stackrel{(3.6)}{\Rightarrow} f_{\text{eq}}(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathcal{Y} &\Rightarrow \text{Supp}(f_{\text{eq}}) = \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

Nach Definition 7 bleibt also zu zeigen, dass  $\mu_{f_{\text{eq}}}(y)$  konstant ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mu_{f_{\text{eq}}}(y) &\stackrel{(3.2)}{=} \Phi_{f_{\text{eq}}}(y) + d \ln f_{\text{eq}} \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \Phi_{f_{\text{eq}}}(y) + d \ln \left( \frac{1}{Z_{\Phi_{f_{\text{eq}}}}} \exp\left(-\frac{\Phi_{f_{\text{eq}}}(y)}{d}\right) \right) \\ &= \underbrace{\Phi_{f_{\text{eq}}}(y) + d \ln \left( \exp\left(-\frac{\Phi_{f_{\text{eq}}}(y)}{d}\right) \right)}_{=0} + d \ln \left( \frac{1}{Z_{\Phi_{f_{\text{eq}}}}} \right) \\ &= -d \ln Z_{\Phi_{f_{\text{eq}}}} = \text{konst.} \end{aligned}$$

Betrachten wir für die Rückrichtung nun ein Nash-Gleichgewichtsmaß  $f_{\text{NE}}$  und zeigen zunächst, dass sein Träger ganz  $\mathcal{Y}$  ist.

*Annahme:* Es existiere ein  $y \in \mathcal{Y}$  mit  $f_{\text{NE}}(y) = 0$ . Dann gilt für die Kosten  $\mu_{f_{\text{NE}}}$ :

$$\lim_{y' \rightarrow y} \mu_{f_{\text{NE}}}(y') = \lim_{y' \rightarrow y} \underbrace{\Phi_{f_{\text{NE}}}(y')}_{\text{beschränkt}} + \lim_{y' \rightarrow y} \ln f_{\text{NE}}(y') = -\infty.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.7). Folglich verschwindet  $f_{\text{NE}}$  nirgends, d.h. sein Träger ist ganz  $\mathcal{Y}$ . Also ist  $\mu_{f_{\text{NE}}}$  konstant auf ganz  $\mathcal{Y}$ . Durch einsetzen der Definition folgt:

$$\begin{aligned} K &= \mu_{f_{\text{NE}}} = \Phi_{f_{\text{NE}}} + d \ln f_{\text{NE}} \\ \Rightarrow \underbrace{\exp\left(\frac{K}{d}\right)}_{=: K'} &= \exp\left(\frac{\Phi_{f_{\text{NE}}}}{d}\right) \exp(\ln f_{\text{NE}}) \\ \Rightarrow K' \exp\left(-\frac{\Phi_{f_{\text{NE}}}}{d}\right) &= f_{\text{NE}}. \end{aligned}$$



Da  $f_{\text{NE}}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss wegen der Normierung bereits  $\frac{1}{K'} = Z_{\Phi_{f_{\text{NE}}}}$  gelten. Damit ist  $f_{\text{NE}}$  eine Gleichgewichtslösung im Sinne von (3.6).  $\square$

Insgesamt haben wir also im homogenen Fall eine Darstellung für die Verteilung von  $f$  im Nash-Gleichgewicht hergeleitet. Dies ermöglicht jetzt die Betrachtung des inhomogenen Falls, in dem die Zustandsvariablen berücksichtigt werden.

## 3.2 Makroskopischer Grenzwert

Wir betrachten erneut die Gleichung (2.4) und untersuchen die Bewegung der gesamten Masse im Zustandsraum  $\mathcal{X}$ . Genauer wollen wir Gleichungen für die Dynamik der Massendichte  $\rho(x, t) := \int_{y \in \mathcal{Y}} f(x, y, t) dy$  herleiten. Diese enthalten dann keine Informationen mehr über die einzelnen Interaktionen der Spieler, die sich im Entscheidungsraum  $\mathcal{Y}$  abspielen.

Wir nehmen an, dass die Spieler ihre Entscheidungen viel schneller variieren können, als sie sich im Zustandsraum bewegen. Um dies in das Modell einzuarbeiten, verwenden wir eine Skalenseparation. Zudem wenden wir ein sogenanntes *Coarse-Graining* an: Durch einen Verlust an Information über die detaillierten Bewegungen der Spieler erhält man so ein makroskopisches Modell für die Massendynamik.

Für die Skalenseparation, definieren wir makroskopische Zustands- und Zeitvariablen  $\hat{x} = \varepsilon x$ ,  $\hat{t} = \varepsilon t$  für ein  $0 < \varepsilon \ll 1$ , wohingegen wir  $y$  nicht skalieren. Somit erhalten wir „langsame“ Zustands- und Zeitvariablen sowie „schnelle“ Entscheidungsvariablen. Nach vorheriger Entdimensionalisierung [3] von (2.4) erhalten wir mit den neuen Variablen die Gleichung:

$$\varepsilon(\partial_{\hat{t}} f^\varepsilon + \nabla_{\hat{x}} \cdot (V(\hat{x}, y) f^\varepsilon)) + \nabla_y \cdot (F_f^\varepsilon f^\varepsilon) = d\Delta_y f^\varepsilon \quad (3.8)$$

mit  $F_f(\hat{x}, y, \hat{t}) = -\nabla_y \Phi_f(\hat{x}, y)$ .

Im Rest dieses Kapitels wollen wir jedoch zur besseren Übersicht die Makrovariablen ohne Zirkumflexe schreiben als:  $x, t$ . Zudem indizieren wir die neuen, durch die Skalenseparation skalierten Funktionen mit  $\varepsilon$ .

Um eine Verteilung  $f(\cdot, \cdot, t) \in \mathcal{P}_{\text{ac}} \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  nach makroskopischen und mikroskopischen Variablen zu unterteilen, betrachten wir mit  $\nu_{x,t}(y) \in \mathcal{P}_{\text{ac}}(\mathcal{Y})$  die bedingte Wahrschein-

lichkeitsdichte von  $f(x, y, t)$  gegeben  $x, t$ :

$$\nu_{x,t}(y) = \frac{f(x, y, t)}{\int_{y \in \mathcal{Y}} f(x, y, t) dy} = \frac{f(x, y, t)}{\rho(x, t)},$$

wobei  $\rho(x, t)$ , wie oben definiert, die Massendichte der Spieler beschreibt. Wir wollen nun annehmen, dass sich die skalierte Kostenfunktion  $\Phi_f^\varepsilon$  in Abhängigkeit von  $\nu_{x,t}$ ,  $\rho$  und  $\varepsilon$  wie folgt schreiben lässt:

$$\Phi_f^\varepsilon(x, y) = \Phi_{\rho, \nu_{x,t}}(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.9)$$

Das heißt, bis zu einer Ordnung von  $\varepsilon^2$  hängt die Kostenfunktion nur von der bedingten Verteilung und der Massendichte ab.  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  sammelt damit alle nicht-lokalen Einflüsse im Zustandsraum. Dahinter steht die Überlegung, dass lokale Interaktionen einen viel höheren Einfluss auf das Verhalten eines Spielers haben, als nicht-lokale.

Damit wir das Coarse-Graining anwenden können, schreiben wir (3.8) wieder mit Hilfe eines Kollisionsoperators  $Q$  und benutzen die obige Annahme (3.9) für die Kostenfunktion:

$$\partial_t f^\varepsilon + \nabla_x \cdot (V(x, y) f^\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} Q(f^\varepsilon), \quad (3.10)$$

mit  $Q(f) = \nabla_y \cdot (\nabla_y \Phi_{\rho, \nu_{x,t}} f + d \nabla_y f)$ .

Wir haben hier die restlichen  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -Terme wegfallen lassen, da diese später im Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  ohnehin verschwinden. Die linke Seite beschreibt nun die *externe* Dynamik der Spieler, also die (langsame) Bewegung der Spieler im Zustandsraum  $\mathcal{X}$ . Diese wird gelenkt durch die (schnellen) lokalen Interaktionen im Entscheidungsraum  $\mathcal{Y}$  auf der rechten Seite. Die Entscheidungsvariablen führen damit das System zum Gleichgewicht  $Q(f) = 0$ . Betrachtet man  $Q(f) = 0$  in (3.10), erhält man annähernd eine Transportgleichung für  $f$  mit Geschwindigkeit  $V$ . Man kann folglich im Gleichgewicht eine gleichmäßige Bewegung der Spielermasse in  $\mathcal{X}$  erwarten. In der Physik entspricht dies dem *Lokalen Thermodynamischen Gleichgewicht (LTE)*.

Um den inhomogenen Fall auf den im ersten Teil besprochenen homogenen Fall zurückzuführen, müssen wir die langsamen Variablen  $x, t$  „einfrieren“, das heißt, wir nehmen sie als unveränderlich an, wenn wir die  $y$ -Dynamik betrachten. Dazu klammern wir

$\rho(x, t)$  aus dem Kollisionsoperator aus:

$$Q(f) = \rho(x, t) \mathcal{Q}_\rho(\nu_{x,t}(y)),$$

$$\mathcal{Q}_\rho(\nu_{x,t}) := \nabla_y \cdot (\nabla_y \Phi_{\rho, \nu_{x,t}} \nu_{x,t} + d \nabla_y \nu_{x,t}).$$

Schließen wir den trivialen Fall  $\rho(x, t) = 0$  aus, so erhalten wir die Gleichgewichtslösungen  $Q(f) = 0$  durch die Lösungen von  $\mathcal{Q}_\rho(\nu_{x,t}) = 0$ . Analog zum Beweis von Proposition 6 erhalten wir:

**Proposition 9.** *Die Lösungen von  $Q(f) = 0$  sind gegeben durch*

$$f(x, y, t) = \rho(x, t) \nu_{x,t}(y),$$

wobei  $\nu_{x,t}(y)$  Lösungen von  $\mathcal{Q}_\rho(\nu) = 0$  sind, welche wiederum gegeben sind als die Lösung des Fixpunktproblems:

$$\nu_{x,t}(y) = \frac{1}{Z_{\Phi_{\rho, \nu_{x,t}}}} \exp\left(-\frac{\Phi_{\rho, \nu_{x,t}}(y)}{d}\right), \quad Z_{\Phi_{\rho, \nu_{x,t}}} = \int_{y \in \mathcal{Y}} \exp\left(-\frac{\Phi_{\rho, \nu_{x,t}}}{d}\right) dy.$$

Nachdem wir jetzt auch im inhomogenen Fall die Gleichgewichtslösungen charakterisiert haben, erhalten wir durch das Coarse Graining im Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  das Makromodell.

**Satz 10.** *Angenommen die Lösung  $f^\varepsilon$  von (3.10) konvergiere für  $\varepsilon \rightarrow 0$  glatt gegen eine Funktion  $f$ , d.h., auch alle Ableitungen von  $f^\varepsilon$  konvergieren gegen die entsprechenden Ableitungen von  $f$ . Dann ist  $f$  durch ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht, also durch die Darstellung in Proposition 9, gegeben. Die Massendichte  $\rho(x, t)$  erfüllt dann folgende Erhaltungsgleichung:*

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0, \tag{3.11}$$

mit der mittleren Geschwindigkeit  $u$  gegeben durch:

$$u = u(x; \nu_{x,t}) := \int_{y \in \mathcal{Y}} V(x, y) \nu_{x,t}(y) dy. \tag{3.12}$$

*Beweis.* Aus (3.10) folgt  $Q(f^\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ . Zusammen mit der Konvergenzannahme ist also  $Q(f) = 0$ . Für eine Funktion  $f(y)$  gilt mit dem Satz von Gauß und der Randbedingung (2.5):

$$\begin{aligned} \int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f)(y) dy &= \int_{y \in \mathcal{Y}} \nabla_y \cdot (f(y) \nabla_y \Phi_f(y) + d \nabla_y f(y)) dy \\ &= \int_{y \in \partial \mathcal{Y}} f(y) \partial_n \Phi_f(y) + d \partial_n f(y) dS(y) \stackrel{(2.5)}{=} 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Integration von (3.10) bezüglich  $y$  liefert dann:

$$\begin{aligned} \int_{y \in \mathcal{Y}} \partial_t f^\varepsilon(x, y, t) + \nabla_x \cdot (V(x, y) f^\varepsilon(x, y, t)) dy &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{y \in \mathcal{Y}} Q(f^\varepsilon)(x, y, t) dy \stackrel{(*)}{=} 0 \\ \stackrel{\text{Prop. 9}}{\Rightarrow} \int_{y \in \mathcal{Y}} \nu_{x,t}^\varepsilon(y) \partial_t \rho^\varepsilon(x, t) dy + \int_{y \in \mathcal{Y}} \nabla_x \cdot (V(x, y) \nu_{x,t}^\varepsilon(y) \rho^\varepsilon(x, t)) dy &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t \rho^\varepsilon(x, t) \underbrace{\int_{y \in \mathcal{Y}} \nu_{x,t}^\varepsilon(y) dy}_{= 1, \text{ da } \nu_{x,t}^\varepsilon \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} + \nabla_x \cdot (\rho^\varepsilon(x, t) \underbrace{\int_{y \in \mathcal{Y}} V(x, y) \nu_{x,t}^\varepsilon(y) dy}_{= u^\varepsilon \text{ nach Def. (3.12)}}) &= 0 \\ \Rightarrow \partial_t \rho^\varepsilon + \nabla_x \cdot (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) &= 0. \end{aligned}$$

Im Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt wegen  $\rho^\varepsilon \rightarrow \rho$  und  $\nu_{x,t}^\varepsilon \rightarrow \nu_{x,t}$  bereits:  $u^\varepsilon \rightarrow u$ . Somit erhalten wir im Grenzwert die makroskopische Gleichung (3.11).  $\square$

Zusammengefasst haben wir also aus dem in Kapitel 2 definierten Teilchenmodell ein makroskopisches Modell herleiten können. Wir haben gezeigt, dass Letzteres durch eine Transportgleichung für die Massendichte  $\rho(x, t)$  gegeben ist. Die Transportgeschwindigkeit  $u$  ergibt sich dabei aus einer gemittelten Geschwindigkeit, die abhängig von der Verteilung  $\nu_{x,t}(y)$  bezüglich der Entscheidungsvariablen gewichtet ist. Dabei ist zu bemerken, dass bei der Anwendung des Modells eventuell weitere Gleichungen aufgestellt werden müssen, um ein geschlossenes System zu erhalten [3].

### 3.3 Beispiel zum Tierherdenverhalten

Wir wollen in diesem Abschnitt ein erstes Modell für Herdenverhalten herleiten, indem wir die Kostenfunktion genauer spezifizieren [3]. Speziell möchten wir das Verhalten einer Tierherde modellieren, unter der Annahme, dass jedes Individuum versucht, seine Bewegungsrichtung mit den anderen abzustimmen. Jeder Spieler repräsentiere nun ein Exemplar aus der Tierherde. Die Zustandsvariable beschreibe seine geographische Po-

sition in der Ebene ( $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ ) und die Entscheidungsvariable seine Bewegungsrichtung ( $\mathcal{Y} = \mathbb{S}^1$ ). Dabei sei  $\mathbb{S}^1$  der Einheitskreis, versehen mit dem normierten Lebesgue-Maß  $dy$ , d.h.

$$\int_{\mathbb{S}^1} 1 \, dy = 1.$$

Jeder Spieler möchte nun den Winkel zwischen seiner eigenen Bewegungsrichtung und der mittleren Bewegungsrichtung aller Spieler, die sich in seiner Umgebung befinden, minimieren. Die Kosten lassen sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\Phi_f(x, y) = -y \cdot \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1} K(x, x') y' f(x', y') dx' dy'. \quad (3.13)$$

Es werden also anteilig die Bewegungsrichtungen  $y'$  all derjenigen Spieler aufintegriert, die sich in einem durch  $K(x, x')$  definierten Einflussgebiet befinden. Betrachte man zum Beispiel ein Individuum  $(x_1, y_1)$  in einer Herde von einhundert Tieren. Befinden sich in seinem Einflussgebiet neun weitere Exemplare  $(x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ , so berechnen sich seine Kosten durch:

$$\Phi_f(x_1, y_1) = -y_1 \cdot \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{100} y_j.$$

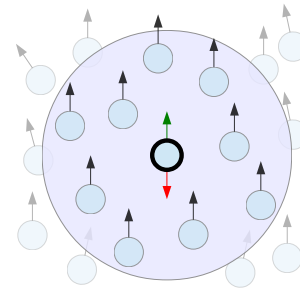
Bewegen sich die neun anderen Exemplare nun in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , so sind die Kosten am geringsten, wenn sich das Individuum  $(x_1, y_1)$  in dieselbe Richtung bewegt

$$\Phi_f(x_1, y_1) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{10}{100},$$

und am höchsten, wenn es sich in entgegengesetzter Richtung bewegt

$$\begin{aligned} \Phi_f(x_1, y_1) &= -\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_{j=2}^{10} \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{8}{100}. \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst wieder den **homogenen Fall**, in dem wir die Ortsvariablen ausblenden. Hierzu setzen wir  $K(x, x') = 1$ . Die Verteilung  $f \in \mathcal{P}_{ac}(\mathbb{S}^1)$  erfüllt dann



*grün: günstige Bewegungsrichtung,*  
*rot: ungünstige Bewegungsrichtung*

die Gleichung (3.1), mit zugehöriger Kostenfunktion

$$\Phi_f(y) = -y \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{S}^1} y' f(y') dy'}_{=: W}. \quad (3.14)$$

Mithilfe von Proposition 6 erhalten wir somit eine Darstellung der Verteilung  $f$  im Nash-Gleichgewicht, die von der Konstanten  $W$  abhängt:

$$f_W(y) = \frac{1}{Z_W} \exp\left(\frac{1}{d}(y \cdot W)\right), \quad Z_W = \int_{\mathbb{S}^1} \exp\left(\frac{1}{d}(y \cdot W)\right) dy. \quad (3.15)$$

Wegen (3.14) muss  $W$  die folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllen:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbb{S}^1} y f_W(y) dy \\ &\stackrel{(3.15)}{=} \int_{\mathbb{S}^1} y \frac{1}{Z_W} \exp\left(\frac{1}{d}(y \cdot W)\right) dy, \end{aligned}$$

oder äquivalent

$$W \int_{\mathbb{S}^1} \exp\left(\frac{1}{d}(y \cdot W)\right) dy = \int_{\mathbb{S}^1} y \exp\left(\frac{1}{d}(y \cdot W)\right) dy. \quad (3.16)$$

Formen wir (3.15) in Polarkoordinaten um, so erhalten wir, dass  $f_W$  eine von-Mises-Verteilung darstellt, d.h. eine Normalverteilung auf dem Kreis [5]. Im einzelnen schreiben wir dazu

$$W = |W|\Omega, \quad \Omega \in \mathbb{S}^1 \quad \text{und} \quad \kappa = \frac{|W|}{d}.$$

Dadurch ergibt sich für die Verteilung  $f_W = f_{\kappa\Omega}$  in (3.15):

$$f_{\kappa\Omega}(y) = \frac{1}{Z_\kappa} \exp(\kappa(y \cdot \Omega)), \quad Z_\kappa = \int_0^{2\pi} \exp(\kappa(\cos(\theta))) d\theta, \quad (3.17)$$

wobei  $\theta$  den Winkel zwischen  $y$  und  $\Omega$  angibt, d.h.  $\cos(\theta) = y \cdot \Omega$ . Die von-Mises-Verteilung  $f_{\kappa\Omega}$  stellt also eine Normalverteilung auf dem Kreis dar, die sich mit dem *Konzentrationsparameter*  $\kappa$  um die *mittlere Richtung*  $\Omega$  konzentriert. Die Kompatibilitätsbedingung (3.16) lautet dann:

$$d\kappa = c(\kappa) =: \frac{\int_0^\pi \exp(\kappa \cos(\theta)) \cos(\theta) d\theta}{\int_0^\pi \exp(\kappa \cos(\theta)) d\theta}. \quad (3.18)$$

Dabei haben wir die Radialsymmetrie bezüglich  $\theta$  ausgenutzt.

Man kann zeigen, dass gilt:  $c(\kappa) \in [0, 1]$  sowie

$$\begin{aligned} \kappa \rightarrow 0 &\Rightarrow c(\kappa) \rightarrow 0 \Rightarrow f_{\kappa\Omega}(y) \rightarrow 1, \\ \text{bzw. } \kappa \rightarrow \infty &\Rightarrow c(\kappa) \rightarrow 1 \Rightarrow f_{\kappa\Omega}(y) \rightarrow \delta_{\Omega}(y). \end{aligned}$$

Dabei ist  $\delta_{\Omega}(y)$  die Delta-Distribution in  $\Omega$ . Die Lösungen zu (3.17), die in [2], [6] hergeleitet werden, liefern für den homogenen Fall folgendes Resultat [3]:

**Satz 11.** (i) Ist  $c'(0) = \frac{1}{2} \leq d$ , so ist  $\kappa = 0$  die einzige Lösung zu (3.17) und das assoziierte Gleichgewicht ist die Gleichverteilung

$$f_{\kappa\Omega} = \mathcal{U}(\mathbb{S}^1).$$

Das Gleichgewicht ist stabil.

(ii) Ist  $c'(0) = \frac{1}{2} > d$ , so besitzt (3.17) genau zwei Lösungen

$$\kappa = 0 \quad \text{und} \quad \kappa_d > 0,$$

für  $\kappa_d$  streng monoton fallend in  $d \in [0, \frac{1}{2}]$ . Die assoziierten Gleichgewichte sind die stetige Gleichverteilung  $f_{\kappa\Omega} = \mathcal{U}(\mathbb{S}^1)$  bzw. alle von-Mises-Verteilungen  $f_{\kappa_d\Omega}$  mit Konzentrationsparameter  $\kappa_d$  und einer beliebigen mittleren Richtung  $\Omega \in \mathbb{S}^1$ . Die Gleichverteilung ist in diesem Fall ein instabiles Gleichgewicht, während die von-Mises-Verteilungen stabil sind.

Für eine rigorose Herleitung der Resultate sei hier auf [2] und [6] verwiesen.

Im **inhomogenen Fall** wenden wir nun das Coarse-Graining aus dem Abschnitt 3.2 an. Wir überprüfen dazu zunächst die Annahme (3.9). Dazu setzen wir

$$K(x, x') = k\left(\frac{|x - x'|}{\varepsilon}\right)$$

für eine Funktion  $k(r) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Anschaulich gesprochen ist das Einflussgebiet eines Individuums damit von der Größenordnung  $\varepsilon$ . Es hängt nicht von seiner konkreten Position ab, sondern lediglich vom Abstand zu den restlichen Individuen. Nehmen wir weiter an, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} k(|x|) dx = 1.$$

Dann folgern wir mit Potenzentwicklung in  $\varepsilon$ , dass für die Kostenfunktion  $\Phi_f^\varepsilon$  gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_f^\varepsilon(x, y) &= -y \cdot \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1} k\left(\frac{|x - x'|}{\varepsilon}\right) y' f(x', y') dx' dy' \\ &= -y \cdot \left[ \rho(x) \int_{\mathbb{S}^1} y' \nu_x(y') dy' \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &=: \Phi_{\rho, \nu_x}(y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Um nun den inhomogenen Fall auf den homogenen zurückführen zu können, muss auch in (3.13) entsprechend mit  $\rho$  skaliert werden und man erhält für die Kompatibilitätsbedingung (3.18):

$$c(\kappa) = \kappa \frac{d}{\rho}.$$

Damit ergeben sich aus Satz 11 für dieses Beispiel die folgenden Makromodelle:

**(i) Hohe Schwanukungen bzw. geringe Dichte:**  $\frac{d}{\rho} < \frac{1}{2}$ .

Das einzige Nash-Gleichgewicht ist die stetige Gleichverteilung  $\mathcal{U}(\mathbb{S}^1)$ . Die mittlere Geschwindigkeit der Herde  $u$  ist gegeben durch:

$$u = \int_{\mathbb{S}^1} y dy = 0,$$

und das Makromodell reduziert sich zu

$$\partial_t \rho = 0.$$

Die Herde bewegt sich also von außen betrachtet in der Zeit nicht. Die Durchmischung innerhalb der Herde ist im Vergleich zur Massendichte zu groß, als dass die Herde in eine konkrete Richtung wandern würde. Um in diesem Fall ein brauchbares Modell zu erhalten, hätte eine diffusive Skalierung der Variablen  $x, t$  gewählt werden müssen.

**(ii) Niedrige Schwanukungen bzw. hohe Dichte:**  $\frac{d}{\rho} < \frac{1}{2}$ .

Die Nash-Gleichgewichte sind von-Mises-Verteilungen  $\nu_{\kappa_d/\rho, \Omega}$  mit  $\Omega \in \mathbb{S}^1$ . Also ist  $f$  gegeben durch:

$$f(x, y, t) = \rho(x, t) \nu_{\kappa_d/\rho, \Omega}(y).$$



Für die mittlere Geschwindigkeit der Herde  $u$  gilt dann:

$$u(x, t) = c(\kappa_{d/\rho})\Omega(x, t) \neq 0,$$

und man erhält folgende Beschreibung des Makromodells:

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (c(\kappa_{d/\rho})\rho\Omega) = 0.$$

In diesem Fall erhalten wir eine sinnvolle Modellierung. Adaptieren die Individuen das Verhalten ihrer Umgebung mit geringen Abweichungen, so bewegt sich die Herde mit einer von  $c(\kappa_{d/\rho})$  bestimmten Geschwindigkeit in Richtung  $\Omega$ . Um ein geschlossenes System zu erhalten müssen jedoch noch weitere Gleichungen für  $\Omega$  hergeleitet werden.

Für  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, \mathcal{Y} = \mathbb{S}^{n-1}$  kann das Modell analog hergeleitet werden, um zum Beispiel das Verhalten von Fischeschwärmen oder andere höherdimensionale Anwendungen zu modellieren. Hierzu sowie für weitere Details verweisen wir auf [3]. Ein zweites Beispiel wird im folgenden Kapitel dargestellt und numerisch simuliert.

## 4 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der numerischen Simulation des im vorherigen Kapitel hergeleiteten Modells. Genauer wenden wir Finite-Differenzen-Verfahren auf ein eindimensionales Problem zur Wohlstandsentwicklung an. Dazu soll zunächst die Anwendung dargestellt sowie die zugehörigen Modelle und die Implementierung beschrieben werden. Dabei orientieren wir uns an [4]. Anschließend folgt eine Auswertung und Interpretation der Resultate.

### 4.1 Beispiel zur Wohlstandsentwicklung

In den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften ist man interessiert an der Analyse der Entwicklung des Wohlstandes innerhalb einer Gesellschaft. Betrachten wir dazu  $N$  Spieler als Repräsentanten der in einer solchen Gesellschaft interagierenden Individuen. Weiterhin besitze jeder Spieler die Variablen  $X \in \mathbb{R}$  und  $Y \in \mathbb{R}_+$ , die zum einen den aktuellen Wohlstand des Spielers und zum anderen seinen gewünschten Wohlstand beschreiben. Letzterer soll dabei einer realistischen Wohlstandsvorstellung entsprechen. Man nimmt an, dass sich jeder Spieler an denjenigen Spielern orientiert, die sich in einer ähnlichen finanziellen Situation befinden und stets einen etwas höheren Status anstrebt als seine Mitstreiter. Formal soll sich also die Wohlstandsvariable  $X_j$  des  $j$ -ten Spielers in gleichem Maße verändern, wie der gewünschte Wohlstand  $Y + \delta$  vom aktuellen entfernt ist. Hierbei stellt  $\delta \geq 0$  eine Rate dar, um die ein jeder Spieler den Status der anderen übertreffen möchte. Damit gilt für die Dynamik in  $X$ -Richtung:

$$\frac{d}{dt}X_j(t) = V(X_j(t), Y_j(t)), \quad \text{mit } V(X_j(t), Y_j(t)) = Y_j(t) + \delta - X_j(t). \quad (4.1)$$

Da sich jeder Spieler wie in einer Herde verhält, sich also in gewisser Weise dem Wohlstand in seiner Umgebung anpasst, können wir die Dynamik in  $Y$ -Richtung analog zu

Kapitel 3 modellieren. In diesem eindimensionalen Fall erhalten wir:

$$dY_j(t) = -\partial_{Y_j} \Phi^N(\vec{X}(t), \vec{Y}(t))dt + \sqrt{2d}Y_j dW_j(t), \quad (4.2)$$

wobei die Differential Schreibweise hier im Sinne des Itô-Integrals [7] zu verstehen ist. Die Kostenfunktion  $\Phi^N$  ist hierbei gegeben durch

$$\Phi^N(\vec{X}(t), \vec{Y}(t)) = \frac{1}{N} \sum_{k \neq j} \xi_{jk}(\vec{X}) \Psi(|X_j - X_k|) \phi(Y_k - Y_j). \quad (4.3)$$

Dabei beschreibt  $\Psi(|X_j - X_k|)$  abhängig vom Abstand zweier Individuen, ob und in welchem Maße ein Wohlstandsaustausch stattfindet. Später wählen wir für  $\Psi$  eine entsprechend skalierte Gaußdichte, sodass die Interaktionen lokal stattfinden und Individuen, die weit voneinander entfernt sind, keinen Einfluss aufeinander ausüben. Dieser Austausch wird des Weiteren mit einer von  $\Psi$  abhängigen Handelsrate  $\xi_{jk}$  gewichtet, die sich wie folgt darstellen lässt:

$$\xi_{jk} = \left( \frac{\rho_j^\Psi + \rho_k^\Psi}{2} \right),$$

mit  $\rho_j^\Psi = \frac{1}{N} \sum_{l \neq j} \Psi(|X_l - X_j|).$

Sind also  $\rho_j^\Psi$  bzw.  $\rho_k^\Psi$  die mittleren Abstände vom Spieler  $j$  bzw.  $k$  zu allen anderen Spielern in ihren jeweiligen Einflussgebieten, so ist die Handlungsrate  $\xi_{jk}$  zwischen den Spielern  $j$  und  $k$  gerade der Mittelwert dieser mittleren Abstände. Ein Spieler wird damit zu einem höheren Wohlstandsaustausch befähigt, wenn sich viele Individuen in seiner Nähe aufhalten.

Die Funktion  $\phi$  sei ein quadratisches Interaktionspotential, da in diesem Fall gezeigt werden kann, dass dann die Einheit für den Wohlstand beliebig wählbar bleibt und sich das Modell somit auf Wohlstandsverteilungen beliebiger Größenordnungen anwenden lässt [4]. Im Speziellen wählen wir bei der anschließenden Implementierung das Potential  $\phi(y) = \frac{|y|^2}{2}$ .

Damit haben wir das Teilchenmodell (4.1)-(4.3) aufgestellt. Analog zu den Ausführun-

gen in Kapitel 3 kann man wiederum ein mesoskopisches Modell, das heißt ein Modell für die Verteilung  $f$  der Spieler, herleiten, das sich durch die folgende, bereits entdimensionalisierte Fokker-Planck-Gleichung darstellen lässt:

$$\partial_t f + \partial_x(V(x, y)) + \partial_y(F_f f) = d\partial_y^2(y^2 f), \quad (4.4)$$

wobei die Kraft  $F_f$  der negativen Ableitung einer kontinuierlichen Kostenfunktion  $\Phi$  in  $y$ -Richtung entspricht und sich daher wie folgt schreiben lässt:

$$F_f(x, y, t) = - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \xi \left( \frac{\rho^\Psi(x, t) + \rho^\Psi(x', t)}{2} \right) \Psi(|x - x'|) \partial_y \phi(y - y') f(x', y', t) dx' dy'. \quad (4.5)$$

Hierbei sei  $\rho^\Psi$  gegeben durch:

$$\rho^\Psi(x, t) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} \Psi(|x - x'|) f(x', y', t) dx' dy'.$$

Ferner gelte für die Rand- und Anfangswerte:

$$f(x, 0, t) = 0, \quad \text{sowie} \quad f(x, y, 0) = f_0(x, y).$$

Zudem wählen wir für  $\xi$  die Identität und für  $\Psi$  eine entsprechende Gaußdichte, damit das Modell mit dem Teilchenmodell (4.1)-(4.3) vergleichbar bleibt. Eine detaillierte Modellierung der hier dargestellten Anwendung zur Wohlstandsentwicklung findet man in [4].

## 4.2 Implementierung

### 4.2.1 Teilchenmodell

Die Programmierung beider Modelle erfolgt mit MATLAB R2011b. Wir betrachten nun zuerst die Implementierung des Teilchenmodells. Zunächst wird eine Datenstruktur erzeugt, die die Spielerzahl  $N = 100$ , die Endzeit  $T = 100$ , die Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.05$ , die Diffusionskonstante  $d = 0.001$  und die Anfangspositionen der Spieler  $x_0, y_0$  enthält. Letztere sind in  $x$ -Richtung um den Wert 20 normalverteilt, mit Standardabweichung

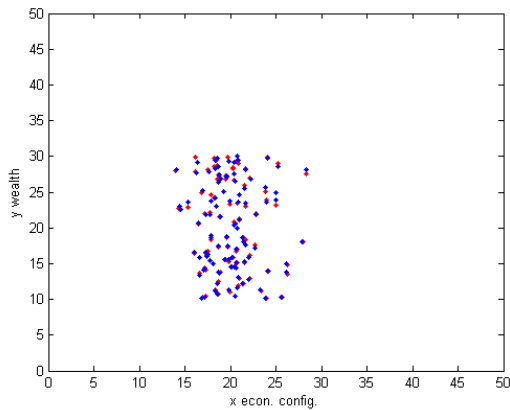


Abb. 1: Simulation mit 100 Spielern nach zwei Zeitschritten der Größe  $\Delta t = 0.05$

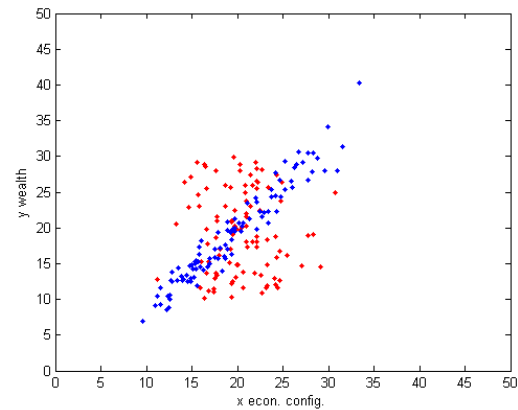


Abb. 2: Simulation mit 100 Spielern zum Zeitpunkt  $T = 20$  mit Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.05$

3. Die  $y$ -Koordinaten der Spieler sind gleichverteilt auf dem Intervall  $[10, 30]$ . Die Anfangspositionen werden in der graphischen Ausgabe rot markiert, während die aktuelle Position blau eingezeichnet wird.

Die Daten werden dann an den Löser übergeben, der für jeden Zeitschritt die neuen Positionen der Spieler bestimmt. In  $x$ -Richtung wird je Zeitschritt ein Update addiert, welches der Geschwindigkeitsfunktion  $V$  aus (4.1) entspricht. Diese wird für die numerische Realisierung mit einem Faktor von 0.1 gedämpft, da sich die Teilchen sonst zu schnell an die Diagonale bewegen würden, ohne dabei in  $y$ -Richtung interagieren zu können. In  $y$ -Richtung werden jeweils Updates für den Drift und den von  $d$  abhängigen Diffusionsterm addiert. Das Programm arbeitet dabei vektoriell. Damit werden aufwändige Schleifendurchläufe vermieden und eine höhere Performance erreicht. Schematisch lassen sich die Iterationsschritte zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned} x_j^{[n+1]} &= x_j^{[n]} + \Delta t \cdot 0,1(y_j^{[n]} - x_j^{[n]}) \\ y_j^{[n+1/2]} &= y_j^{[n]} - \frac{\Delta t}{N} \sum_{j \neq k} \xi_{jk} \Psi(|x_j^{[n]} - x_k^{[n]}|)(y_j^{[n]} - y_k^{[n]}) \\ y_j^{[n+1]} &= y_j^{[n+1/2]} + \sqrt{2d} y_j^{[n]} \sqrt{\Delta t} W, \end{aligned}$$

wobei die Brown'schen Bewegungen  $W$  jeweils mithilfe des Befehls `randn(N,1)` erzeugt werden.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Ergebnisse der Simulation (blau) ausgehend von zwei, wie oben beschrieben zufällig generierten Anfangsdaten (rot). Nach zwei Zeitschritten befinden sich die Spieler noch in der Nähe ihrer Anfangspositionen und werden sich dann in Richtung der Diagonalen bewegen. Zum Zeitpunkt  $T = 20$  befinden sich die meisten Spieler auf einem Wohlstandslevel zwischen  $y = 10$  und  $y = 25$ . Man kann beobachten, dass es einige Spieler schaffen sich auf ein höheres Wohlstandslevel abzusetzen, während nach unten hin nur wenige Spieler von der Masse abweichen. Dieser Effekt setzt sich auch für größere Zeiten fort.

## 4.2.2 Kontinuumsmodell

Im kontinuierlichen Fall betrachten wir die Fokker-Planck-Gleichung (4.4),(4.5). Für die Implementierung erstellen wir zunächst ein  $x$ - $y$ -Gitter. Da wir jetzt eine Verteilung von Spielern betrachten, anstatt deren genaue Position zu kennen, müssen wir das Rechengebiet zunächst einschränken. Simulationen haben ergeben, dass sich die Lösung auf Gitterpunkten außerhalb des Rechtecks  $[0, 50] \times [0, 50]$  nur geringfügig ändert, sodass dieses eine sinnvolle Beschränkung darstellt. Die Gitterweiten seien durch  $\Delta x = \Delta y = 0.5$  gegeben. Wir verwenden für die Berechnung ein Operator Splitting Verfahren. Das heißt, wir berechnen die Verteilung zum neuen Zeitpunkt, indem wir zuerst die Änderung in  $x$ -Richtung betrachten. Mit dem Zwischenergebnis  $\tilde{f}^n$  werten wir daraufhin die Kraft  $F_{\tilde{f}^n}$  aus und betrachten dann die Änderung in  $y$ -Richtung. Dabei verwenden wir für den advektiven Anteil in beide Richtungen ein Upwind-Verfahren und zentrale Differenzen für den diffusiven Anteil in  $y$ -Richtung. Zusammengefasst erhalten wir das Verfahren:

$$1.) \quad \tilde{f}^n = \begin{cases} f^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} D_-(0, 1(y-x)f^n), & \text{für } (y-x)f^n \geq 0 \\ f^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} D_+(0, 1(y-x)f^n), & \text{für } (y-x)f^n < 0. \end{cases}$$

2.) Berechne die Kraft  $F$  abhängig von  $\tilde{f}^n$ .

$$3.) \quad f^{n+1} = \begin{cases} \tilde{f}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} D_-\left(\tilde{f}^n(F_{\tilde{f}^n} - 2dy) - dy^2 D_+ \tilde{f}^n\right), & \text{für } F_{\tilde{f}^n} - 2dy \geq 0 \\ \tilde{f}^n - \frac{\Delta t}{\Delta y} D_+\left(\tilde{f}^n(F_{\tilde{f}^n} - 2dy) - dy^2 D_- \tilde{f}^n\right), & \text{für } F_{\tilde{f}^n} - 2dy < 0. \end{cases}$$

Hierbei seien  $D_+$  und  $D_-$  die Operatoren für die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen. Man kann nachrechnen, dass das Verfahren bei einer Zeitschrittweite von  $\Delta t = 0.05$  eine

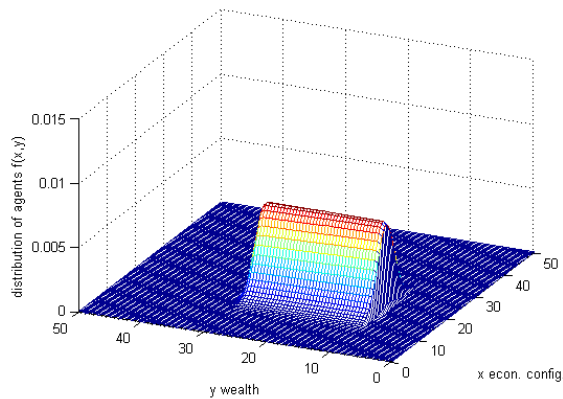


Abb. 3: Anteil der Spieler  $f(x, y)$  nach zwei Zeitschritten der Größe  $\Delta t = 0.05$

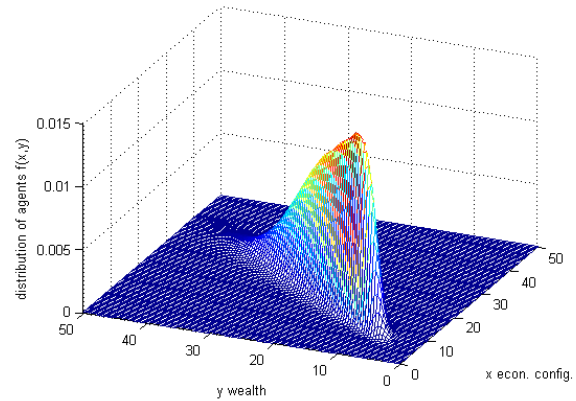


Abb. 4: Anteil der Spieler  $f(x, y)$  zum Zeitpunkt  $T = 20$  mit Zeitschrittweite  $\Delta t = 0.05$

CFL-Bedingung erfüllt und damit stabil bleibt. Die Anfangswerte, bestehend aus einer Gaußverteilung in  $x$ - und einer Gleichverteilung in  $y$ -Richtung um den Gitterpunkt  $(20, 20)$ , werden wie folgt implementiert:

$$f_0 = @(x,y)(\text{normpdf}(x,20,3) .* \text{unifpdf}(y,10,30))$$

Da sich die Verteilung am Rand des Rechengebiets in der Zeit nur geringfügig ändert und sie dort zu Beginn den Wert Null besitzt, erweisen sich homogene Dirichlet-Randbedingungen als sinnvoll. Für den Diffusionskoeffizienten und die Endzeit wählen wir analog zum Teilchenmodell  $d = 0.001$  und  $T = 100$ .

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die Verteilung der Spieler  $f(x, y)$  kurz nach Beginn der Simulation  $T = 0.1$  und zu einem fortgeschrittenen Zeitpunkt  $T = 20$ . Genau wie im Teilchenmodell wandert der gesamte Anteil der Spieler in Richtung der Diagonalen. Ähnlich wie im Teilchenmodell sammelt sich der Hauptanteil der Spieler im Intervall  $y \in [5, 25]$ . Wiederum ist die Ausreißerquote nach oben höher als nach unten.

### 4.3 Modellvergleich

Mithilfe der beiden Programme können wir nun die Wohlstandsverteilung, das heißt  $\varrho(x, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y, t) dx$ , numerisch ermitteln. Zudem überprüfen wir, inwieweit die Modelle übereinstimmen und in welchen Aspekten sie sich unterscheiden. Zur Analyse

summieren wir für jedes  $y$  die diskreten Werte beider Modelle. Die daraus erhaltene Wohlstandsverteilung stellen wir in einem Histogramm dar. Wir geben also für jedes Wohlstandslevel  $y \in \{0, \dots, 50\}$  an, wie viele der  $N = 100$  Spieler sich auf diesem befinden. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, rechnen wir im kontinuierlichen Modell die relativen Werte auf absolute Spieleranzahlen je Wohlstandslevel hoch, indem wir mit  $N$  multiplizieren.

In Abbildung 5 sind die Ergebnisse beider Programme für drei verschiedene Anfangsdaten dargestellt. Links ist jeweils die Auswertung des Teilchenmodells abgebildet und rechts das kontinuierliche Modell mit analogen Anfangsdaten. Für das Teilchenmodell wurden jeweils 500 Simulationen durchgeführt und gemittelt, um zufällige Abweichungen einzelner Simulationen zu minimieren. In jedem Diagramm sind die Wohlstandsverteilungen zum Startpunkt  $T = 0$  (rot) und für eine groß gewählte Endzeit  $T = 100$  (blau) eingezeichnet. Für spätere Zeitpunkte ändern sich die Verteilungen in beiden Modellen nur noch geringfügig, sodass man von einem Gleichgewichtszustand sprechen kann. Dieser stellt sich bei allen hier gewählten Anfangswerten ein. Die numerischen Ergebnisse entsprechen damit der in Kapitel 3 aufgeführten Konvergenz gegen Nash-Gleichgewichte.

In der ersten Simulation (Abb. 5, oben) sind die Anfangswerte wie oben beschrieben gewählt, also in  $x$ -Richtung gaußverteilt ( $\mathcal{N}(20, 3^2)$ ) und in  $y$ -Richtung gleichverteilt ( $\mathcal{U}([10, 30])$ ). Zu Beginn teilen sich die Spieler gleichmäßig zwischen einem Wohlstandslevel von 10 und 30 auf, was auch im Teilchenmodell durch die Mittlung der 500 zufällig erzeugten Anfangswerte gewährleistet bleibt. Im Wesentlichen verteilen sich die Spieler zum Endzeitpunkt in beiden Modellen ähnlich einer Gaußkurve um den Wert 12. Wobei die Abweichung nach oben höher ist als die nach unten. Im Anwendungszusammenhang bedeutet dies, dass der größere Teil der Gesellschaft einen niedrigeren Wohlstand besitzt, als es zum Anfangszeitpunkt der Fall gewesen ist, wenn er sich gemäß der oben beschriebenen Modellierung verhält. Auf der anderen Seite gibt es einen geringen Anteil an Spielern, die nun über einen enorm hohen Wohlstand ( $y > 40$ ) verfügen.

Die zweite Simulation (Abb. 5, Mitte) betrachtet Anfangswerte, die sich in  $y$ -Richtung einmal um den Wert 10 und einmal um den Wert 40 gleichverteilen. Man geht also von einer Gesellschaft aus, in der sich gleichviele „arme“ wie „reiche“ Individuen befinden, wobei es anfangs keine Mittelschicht gibt. Im Gleichgewicht  $T = 100$  ergibt sich eine



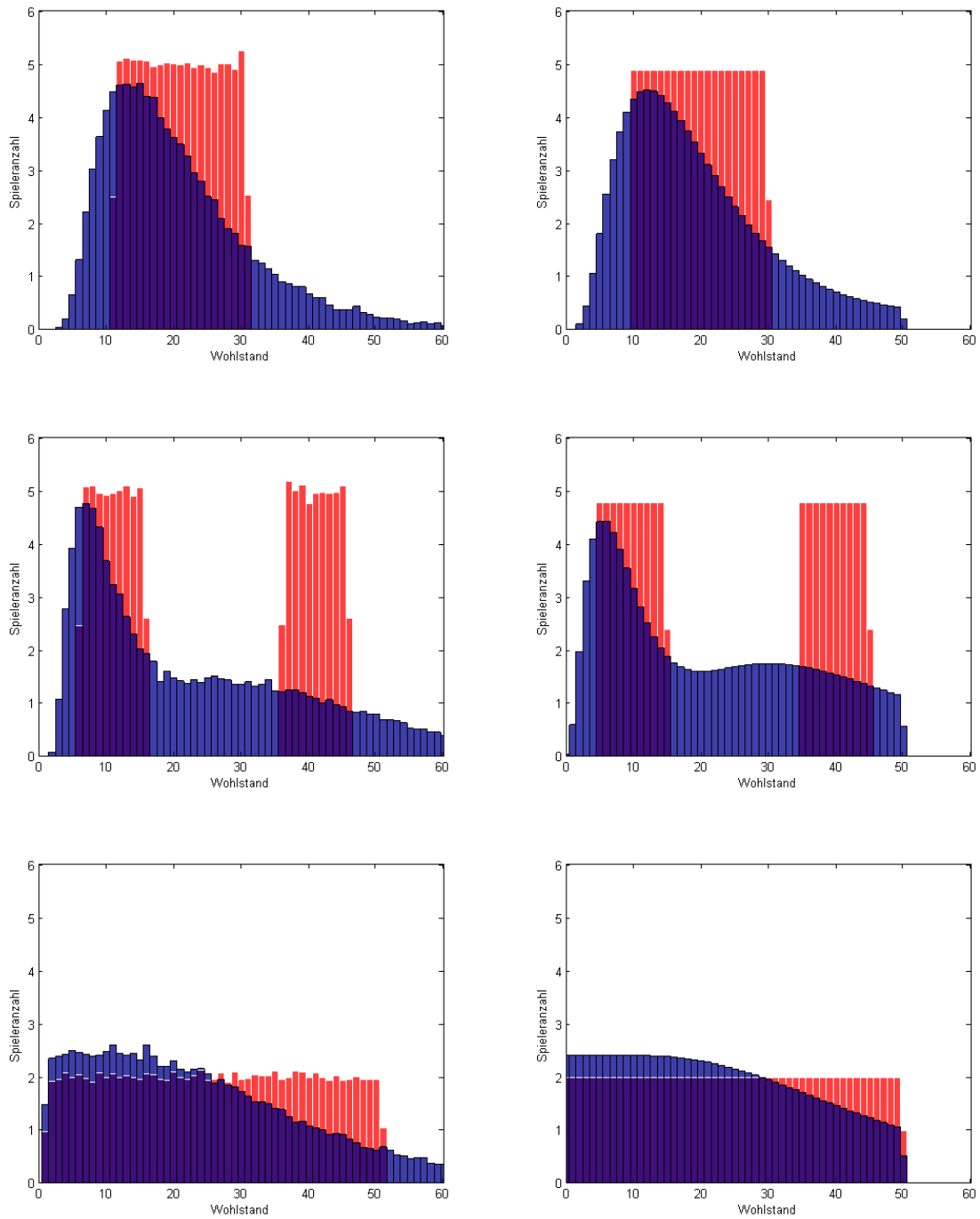


Abb. 5: Wohlstandsverteilung, errechnet aus 500 Simulationen des Teilchenmodells (links) und aus dem kontinuierlichem Modell (rechts), jeweils bis zum Zeitpunkt  $T = 100$  für drei verschiedene Anfangsdaten.

ähnliche Verteilung wie im vorherigen Beispiel, wobei sich in diesem Fall weniger Spieler in der unteren Mittelschicht ( $12 < y < 25$ ) befinden, sondern auf einem günstigeren Wohlstandslevel um ein lokales Maximum bei etwa  $y = 30$ .

Die dritte Simulation (Abb. 5, unten) beschreibt den Fall, in dem es zu Beginn auf jedem Wohlstandslevel gleichviele Spieler gibt. Im Langzeitverhalten lässt sich hier eine nur geringe Veränderung beobachten. Es wandern lediglich wenige Spieler von einem hohen ( $y > 30$ ) auf ein niedrigeres Wohlstandsniveau ( $y < 30$ ). An diesem Beispiel lässt sich vor allem die Tendenz beobachten, die schon in den vorherigen Simulationen deutlich wurde: Auf lange Sicht ergibt sich eine Gesellschaftsverteilung mit größerem Anteil an ärmeren und einem geringen Anteil an reichen Individuen.

Für eine genauere Interpretation müssen, je nach Anwendungsbeispiel, weitere Informationen zum Interaktions- und Entscheidungsverhalten der Spieler gegeben werden. Da die Implementierung jedoch weitgehend nach den in der Modellierung vorkommenden Funktionen unterteilt ist, lässt sich dies leicht realisieren. Zudem wäre ein Vergleich mit vorhandenen Studien für die Auswertung und Verbesserung der numerischen Resultate hilfreich.

Insgesamt ergeben sich jedoch für Teilchen- und Kontinuumsmodell stabile Simulationen, die einander in sehr hohem Maße entsprechen. Der Vorteil des Teilchenmodells ist, dass man auf einem unbeschränkten Gebiet arbeitet und so auch Effekte am Rand erfassen kann. Um jedoch eine Entsprechung beider Modelle zu erhalten müssen im Teilchenmodell mehrere Simulationen gemittelt werden, was die Laufzeit extrem erhöht. Die Simulationen im kontinuierlichen Fall liefern auch für sehr unterschiedliche Anfangswerte annähernd dieselben Ergebnisse, in weniger als einem Zehntel der Zeit. Der Vorteil in der Performance steigt zudem noch weiter, wenn man höhere Spieleranzahlen betrachten würde. Auf der anderen Seite muss hier das Rechengebiet eingeschränkt werden, sodass am Rand Informationen verloren gehen können.

## 5 Fazit und Ausblick

Wir haben nach einer kurzen Einführung ein makroskopisches Modell zur Beschreibung von Massendynamiken aus einem mikroskopischen Teilchenmodell hergeleitet. Wir konnten feststellen, dass sich durch eine Skalenseparation bei geringer Diffusion eine Transportgleichung für die Massendichte herleiten lässt. Neben den theoretischen Resultaten und einem Beispiel zum Tierherdenverhalten haben wir ein Beispiel zur Wohlstandsentwicklung implementiert. Dabei haben wir herausstellen können, dass die Implementierung des Konitnummodells für die Verteilung von Spielern in hohem Maße dem zugrundeliegenden Teilchenmodell entspricht, sofern eine hohe Spieleranzahl vorausgesetzt wird.

Wir haben damit nicht nur die theoretischen Aussagen untermauern können, sondern auch ein stabiles Programm entwickelt, das die Massendynamik weitaus schneller berechnet, als ein Programm, das alle einzelnen Teilcheninteraktionen berücksichtigt. Ausgehend von diesen Ergebnissen könnte man nun zusätzlich die Numerik für das Makromodell der Massendichte realisieren und vergleichen. Außerdem können Studien im jeweiligen Anwendungszusammenhang dabei helfen, die Qualität der Modelle zu beurteilen und damit weiter zu verbessern.

---

## Literaturverzeichnis

- [1] Cristina Bicchieri. Rationality and game theory. *The Oxford handbook of rationality*, pages 182–205, 2004. 5
- [2] Pierre Degond, Amic Frouvelle, and Jian-Guo Liu. Macroscopic limits and phase transition in a system of self-propelled particles. *Journal of Nonlinear Science*, pages 1–30, 2013. 20
- [3] Pierre Degond, Jian-Guo Liu, and Christian Ringhofer. A nash equilibrium macroscopic closure for kinetic models coupled with mean-field games. *arXiv preprint arXiv:1212.6130*, 2012. 5, 7, 8, 14, 17, 20, 22
- [4] Pierre Degond, Jian-Guo Liu, and Christian Ringhofer. Evolution of the distribution of wealth in an economic environment driven by local nash equilibria. *arXiv preprint arXiv:1307.1685*, 2013. 23, 24, 25
- [5] Catherine Forbes, Merran Evans, Nicholas Hastings, and Brian Peacock. *Statistical Distributions, Fourth Edition*. Wiley, 2010. 19
- [6] Amic Frouvelle and Jian-Guo Liu. Dynamics in a kinetic model of oriented particles with phase transition. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 44(2):791–826, 2012. 20
- [7] Crispin W Gardiner et al. *Handbook of stochastic methods*, volume 3. 1985. 5, 6, 24
- [8] Hans-Otto Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9. Walter de Gruyter, 2011. 9
- [9] Rufus Isaacs. *Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization*. Courier Dover Publications, 1999. 4
- [10] Jean-Michel Lasry and Pierre-Louis Lions. Mean field games. *Japanese Journal of Mathematics*, 2(1):229–260, 2007. 3

- 
- [11] Roger B Myerson. *Game theory: analysis of conflict*. Harvard university press, 2013. 3
- [12] John Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951. 3
- [13] Alain-Sol Sznitman. Topics in propagation of chaos. In *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX-1989*, pages 165–251. Springer, 1991. 7